L.S.C.J.Gafsa **Date :** 22 Novembre 2011 **Classe :** 4è.Math.

Prof : B.Tabbabi **Epreuve :** Mathématique **Durée :** 2 heures

DEVOIR DE CONTRÔLE N°1

Exercice 1 : (4.25 points)

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	-1

On donne ci-contre le tableau de variation d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Répondre par vrai ou faux à chacune des questions suivantes :

1. *L'équation f(x) = 0 admet dans $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ deux solutions.*
2. *La courbe de f admet exactement deux asymptotes.*
3. $\lim\limits_{x\to 1} f\circ f(x)=+\infty$ *(justifier).*
4. $f\left(\left]-\infty,1\right[\right)=\left]0,+\infty\right[$.
5. *Pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ on a , $f(x)\geq x$ (justifier).*

Exercice 2 : (6 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les deux nombres complexes $a=\sqrt{3}+i$ et $b=1-i\sqrt{3}$.

1. a. *Donner l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes a et b.*

   b. *Vérifier que $a^2=2\bar{b}$.*

2. *Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.*

   a. *Placer les points A ,B et C d'affixes respectives a , $\bar{b}$ et $c=a+\bar{b}$.*

   b. *Vérifier que $c=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$.*

3. *On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2+2z-2c=0$.*

   a. *Vérifier que a est une solution de (E).*

   b. *On désigne par d la deuxième solution de (E).Montrer que $d=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)e^{-i\frac{11\pi}{12}}$.*

   c. *Construire alors le point D.*

Exercice 3 : (5 points)

Soit α un réel tel que $0<\alpha<\frac{1}{2}$.

On considère les deux suites réelles (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$u_0=2$; $v_0=1$ *et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1}=(1-\alpha)u_n+\alpha v_n$ et $v_{n+1}=\alpha u_n+(1-\alpha)v_n$.*

1. *Soit (t_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $t_n=u_n-v_n$.*

   Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $t_n=(1-2\alpha)^n$. En déduire la limite de la suite (t_n).

2. a. *Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n\geq v_n$.*

   b. *Montrer que la suite (u_n) est décroissante et que la suite (v_n) est croissante.*

   c. *En déduire que les deux suites (u_n) et (v_n) sont convergentes vers une même limite l.*

3. a. *Montrer que la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n=u_n+v_n$ est constante.*

   b. *En déduire la valeur de l.*

voir verso $\Rightarrow$

Exercice 4 : *(4.75 points)*

Soit n un entier naturel non nul.On considère la fonction f_n *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f_n(x)=x^3+nx-n$.

1.Vérifier que f_n *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.

2.Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ *admet dans l'intervalle* $]0,1[$ *une solution unique* a_n *.Vérifier que* $a_n = \dfrac{n}{n+a_n^2}$.

3.a.Vérifier que $f_{n+1}(a_n)=a_n-1$ *.Que vaut* $f_{n+1}(a_{n+1})$ *?*

b.En déduire que la suite (a_n) *est croissante puis qu'elle est convergente.*

4.Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ *on a* $a_n > \dfrac{n}{n+1}$ *. En déduire* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Bon travail

* * * * * * *