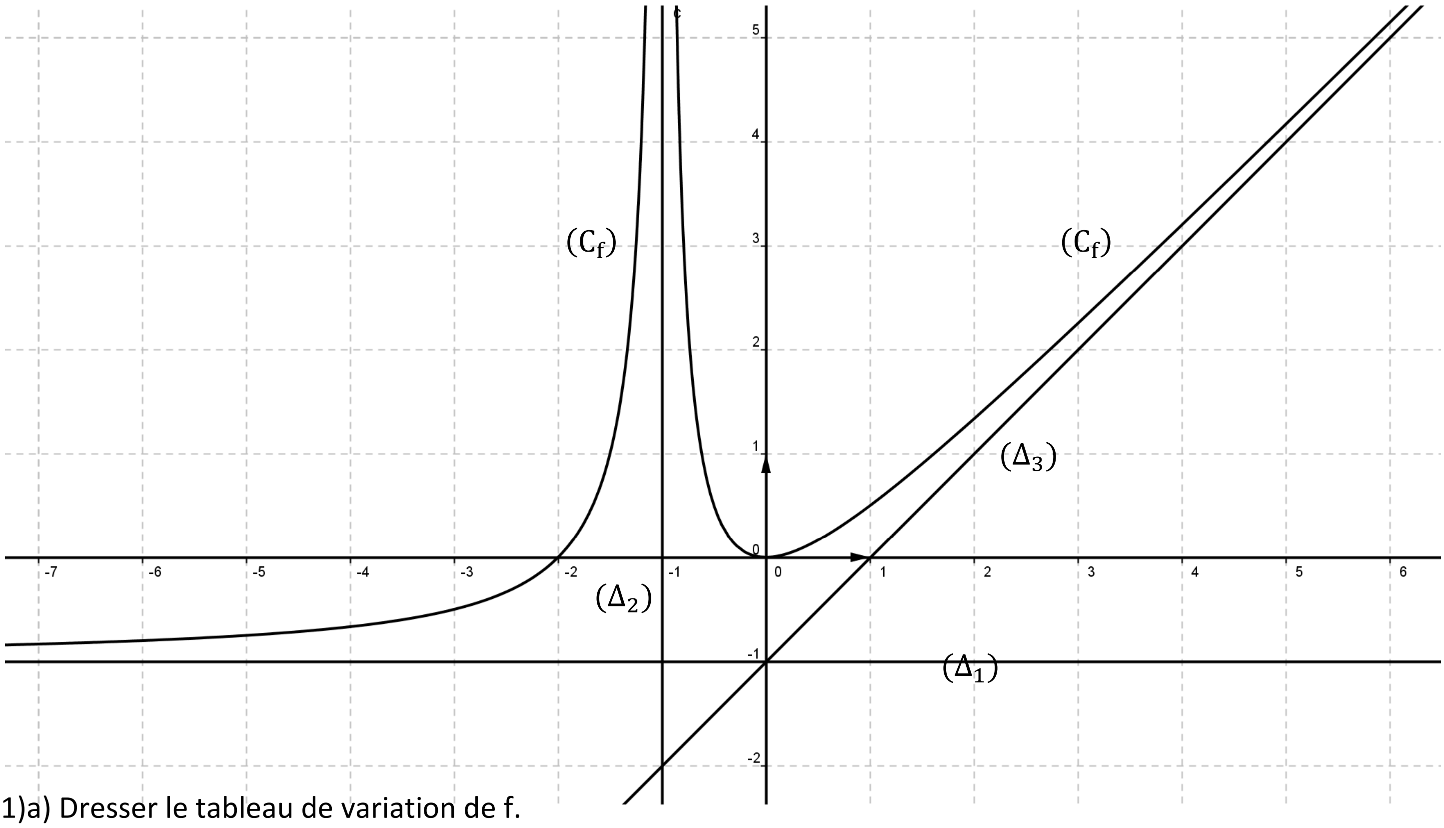
L. Regueb	Mathématiques	Classe : 4ème M
Prof : Salhi Noureddine	Devoir de Contrôle№1	Le : 18/11/2011 Durée : 2h

Exercice1(7pts)

On a représenté dans un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$, la courbe (C_f) d'une fonction f continue et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et les droites (Δ_1) , (Δ_2) , (Δ_3) asymptotes à (C_f) .



1)a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Déterminer l'image par f de chacun des intervalles $]-\infty\,,-1[$ et $]-1\,,+\infty[$.

c) Calculer $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]$ et $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x]$.

2) Soit g la fonction définie par : $g(x)=\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$.

a) Déterminer le domaine de définition de la fonction g .

b) Dresser le tableau de variation de g .

c) Soit k un réel strictement positif, donner le nombre de solutions de l'équation : g(x) = k .

3)a) Montrer que la fonction $f\circ f$ est bien définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

b) Déterminer les limites de $f\circ f$ aux bornes de son domaine de définition $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

c) Déterminer $(f\circ f)(\,]-\infty\,,-2])$.

d) Montrer que l'équation $(f\circ f)(x)=\frac{-1}{2}$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

www.devoir@t.net © 2011

Exercice2(6pts)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + u_n + \frac{2}{u_n}$; $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3)a) Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 \leq u_{n+1} - u_n \leq 3$.

b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $n + 1 \leq u_n \leq 3n + 1$.

c) Calculer la limite de (u_n) .

4) On pose , pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \sum_{k=0}^{k=2n} \frac{(-1)^k}{u_k} = \frac{(-1)^0}{u_0} + \frac{(-1)^1}{u_1} + \frac{(-1)^2}{u_2} + \cdots\cdots + \frac{(-1)^{2n}}{u_{2n}}$

et $w_n = v_n - \frac{1}{u_{2n+1}}$.

a) Montrer que (v_n) et (w_n) sont deux suites adjacentes.

b) Donner un encadrement de $L = \lim_{n\to+\infty} v_n$.

Exercice3(7pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$. On appelle f l'application qui à tout point M d'affixe z différente de -1 , associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \frac{-iz-2}{z+1}$.

Soient A , B et C les points d'affixes respectives $a = -1$, $b = 2i$ et $c = -i$.

1) Soit C' l'image du point C par f . Donner l'affixe c' du point C' sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

2) Calculer l'affixe du point D ayant pour image par f le point D' d'affixe $d' = \frac{1}{2}$.

3) Pour tout nombre complexez différent de -1 , on note p le module de z+1 et p' le module de z'+i .

a) Démontrer que pour tout complexe z différent de -1 , on a : $pp' = \sqrt{5}$.

b) Si le point M appartient au cercle (Γ) de centre A et de rayon 2 , montrer qu'alors M' = f(M) appartient à un cercle (Γ') , dont on précisera le centre et le rayon.

4) Pour tout nombre complexe z différent de -1 , on considère le nombre complexe $w = \frac{z-2i}{z+1}$.

a) Interpréter géométriquement l'argument du nombre complexe w .

b) Montrer que $z' = -iw$.

c) Déterminer l'ensemble (F) des points M d'affixe z telle que z' soit un réel non nul .

d) Vérifier que le point D appartient aux ensembles (Γ) et (F) .

www.devoir@t.net © 2011