Lycée Tahar Sfar
Mahdia

DEVOIR DE CONTROLE N° 1

Mathématiques

Classe : 4 ème Info

Date : 12 / 11 / 2011

Prof : Meddeb Tarak

Durée : 2 heures

Exercice n°1 : (3 pts)

Pour chaque question Q_i , une seule des trois propositions a/, b/ et c/ est exacte. On indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie sans justification.
Une réponse exacte rapporte 0,75 point, une réponse inexacte enlève 0,25 point, l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, alors la note sera ramenée à zéro.

Q_1 : Si l'équation (E): $z^2 + bz + i = 0$ admet $z_1 = i$ comme solution dans $\mathbb{C}$ alors b est égal à :

$a/\ 1 - i$ $\quad$ $b/\ -1 - i$ $\quad$ $c/\ 1 + i$

Q_2 : soit f une fonction définie sur IR telle que $\lim_{x \to +\infty} f(x) + x = 3$, alors sa courbe C_f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote d'équation :

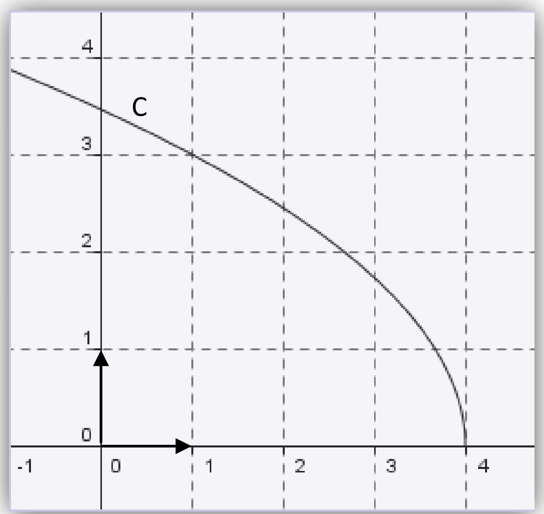
$a/\ y = x - 3$ $\quad$ $b/\ y = x + 3$ $\quad$ $c/\ y = -x + 3$

C est la courbe représentative d'une fonction continue sur sur $[-1, 4]$.

(voir figure)

Soit U la suite définie sur IN par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \text{ pour tout } n \in IN \end{cases}$$



Q_3 : La suite U est :

$a/$ Croissante.

$b/$ Décroissante.

$c/$ N'est pas monotone.

Q_4 : La suite U est :

$a/$ Convergente vers un réel $l \in \left]2, \frac{5}{2}\right[$.

$b/$ Convergente vers un réel $l \in \left]\frac{5}{2}, 3\right[$.

$c/$ Divergente.

Exercice n°2 : (6 pts)

Soit f la fonction définie sur $[1\,,+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{x^2-x}-2x$.

On désigne par C_f sa courbe représetative dans un repère orthonrmé $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$.

1) $a/$ Soit x un réel, comparer x^2-x et $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$.

   $b/$ En déduire que, pour tout $x \geq 1$, $f(x)\leq -\frac{1}{2}-x$.

   $c/$ Calculer alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) On admet que, pour tout $x \geq 1$, $f(x)\geq -1-x$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

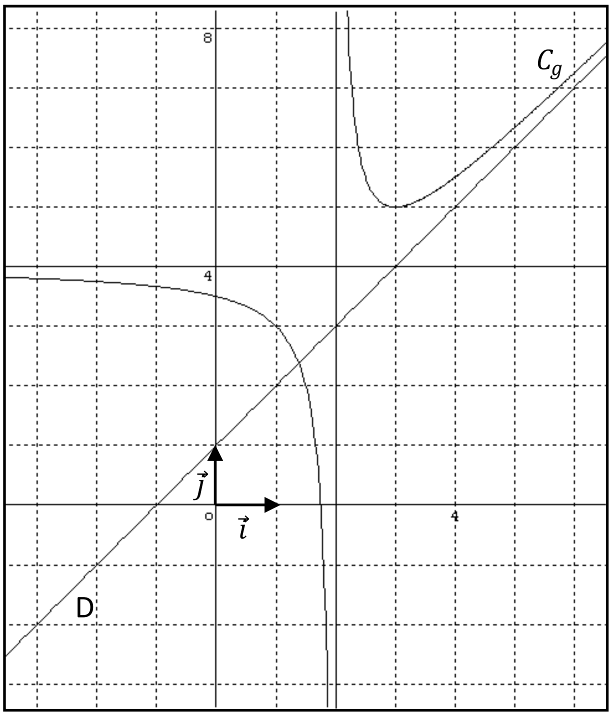
3) $a/$ Montrer que, pour tout $x \geq 1$, on a : $f(x)+x=\dfrac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1}$.

   $b/$ En déduire que la droite Δ d'équation : $y=-x-\frac{1}{2}$ est une asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$.

   $c/$ Etudier la position de C_f par rapprt à Δ.

4) La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction g définie sur $IR\setminus\{2\}$.

   La droite D est une asymptote à la courbe au voisinage de $+\infty$, et la droite d'équation : $y = 4$ est une asymptote à la courbe au voisinage de $-\infty$.



   $a/$ Déterminer les limites suivantes :

   $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to1^+} g(x)$

   $et \lim\limits_{x\to+\infty} (\,g(x)-x-1)$.

   $b/$ Déterminer les limites suivantes :

   $\lim\limits_{x\to1^+} f\ o\ g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g\ o\ f(x)$.

Exercice n°3 : (5,5 pts)

Soit U la suite définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = 4\left(1 - \dfrac{1}{U_n}\right) \quad pour\ \ tout\ \ n \in IN \end{cases}$

1) $a/$ Montrer, par récurrence, que, pour tout $n \in IN$, on a : $U_n > 2$.

   $b/$ Vérifier que, pour tout $n \in IN$, on a : $U_{n+1} - U_n = \dfrac{-(U_n - 2)^2}{U_n}$. En déduire le sens de variation de la suite U.

   $c/$ Déduire de ce qui précède, que la suite U est convergente, et déterminer sa limite.

2) On pose : $V_n = \dfrac{1}{U_n - 2}$ pour tout $n \in IN$.

   $a/$ Montrer que V est une suite arithmétique.

   $b/$ Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

   $c/$ Retrouver la limite de la suite U.

Exercice n°4 : (5,5 pts)

1) $a/$ Ecrire sous la forme algébrique le nombre complexe $(2+3i)^2$.

   $b/$ Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

   $z^2 - (2+7i)z - 10 + 4i = 0$.

2) On pose : $f(z) = z^3 - (5+7i)z^2 + (-4+25i)z + 30 - 12i$.

   $a/$ Calculer $f(3)$.

   $b/$ En déduire que : $f(z) = (z-3)(z^2 + bz + c)$ où b et c sont deux nombres complexes que l'on déterminera.

   $c/$ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $f(z) = 0$.

3) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2i$, $z_B = 3$ et $z_C = 2 + 5i$.

   $a/$ Montrer que : $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$.

   $b/$ En déduire que le triangle ABC est rectangle et isocèle en A.

Bonne chance