

السلامة في العمل



❖❖ EXERCICE 01 ❖❖

1- Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

$$e^x + 2e^{-x} - 3 = 0 ; e^{x+1} - 3 = 0 ; e^{2x} + 6e^x + 5 = 0$$

2- Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} xe^x$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x$; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{e(x-1)}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} ; \lim_{x \rightarrow 0^+} xe^x ; \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x ; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{e(x-1)}$$

3- a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $\frac{e^{2x} + 1}{e^x - 1} = e^x - 1 + \frac{2e^x}{e^x - 1}$

b) En déduire $\int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{e^{2x} + 1}{e^x - 1} dx$

❖❖ EXERCICE 02 ❖❖

Soit F la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $F(x) = \int_0^x \sqrt{t} e^{-t} dt$

Cocher la réponse juste (sans calculer $F(x)$):

* F est strictement croissante sur $[0, +\infty[$

* Pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a : $F(x) \leq \int_0^x te^{-t} dt$

* Pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a : $F'(x) = \sqrt{x} e^{-x} - e^{-1}$

* 0 est l'unique solution de l'équation $F(x) = 0$

❖❖ EXERCICE 03 ❖❖

Dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère la courbe (\mathcal{C}_f) ci-dessous d'une fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} .

1- Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $f'(1)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x+4)}{x+4}$

2- Dresser le tableau de variation de f

3- a) Calculer $A_n = \int_1^n -xe^{1-x} dx$; $n \in \mathbb{N}^*$

b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$

4- Soit $g(x) = -f(x)$; $x \in \mathbb{R}$

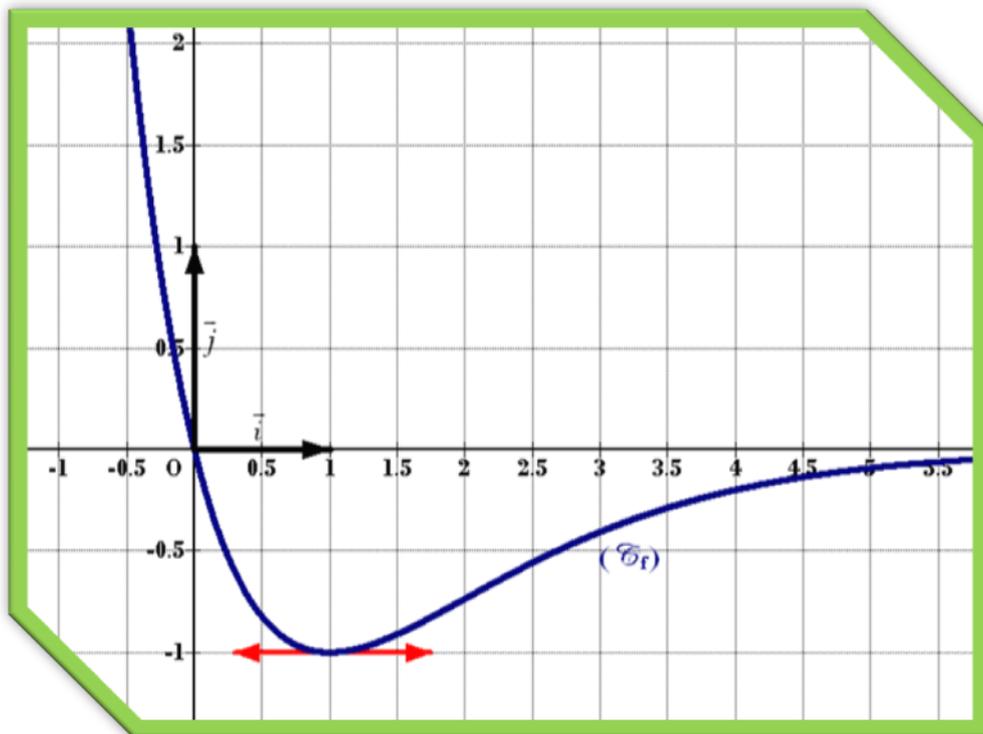
Tracer (\mathcal{C}_g)

5- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^n k e^{1-k}$

a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on a : $g(k) \leq \int_{k-1}^k g(t) dt$

b) En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée par 3.

c) En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.



❖❖ EXERCICE 04 ❖❖

Soit $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$

1- Déterminer D_f

2- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

3- a) Montrer que f est dérivable sur D_f et que pour tout $x \in D_f$, on a :

$$f'(x) + f(x) = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

b) En déduire $\int_0^{\ln(2)} f(x) dx$

❖❖ EXERCICE 05 ❖❖

Soit $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$

1- Déterminer D_g

2- a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, il existe $c \in [x, x+1]$ tel que :

$$g(x) - g(x+1) = \frac{1}{c^2} e^{\frac{1}{c}}$$

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right)$

❖❖ EXERCICE 06 ❖❖

Soit $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

1- Déterminer D_f

2- Dresser le tableau de variation de f

3- Montrer que f réalise une bijection de D_f sur un intervalle I que l'on précisera.

4- Tracer (\mathcal{C}_f) et $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ dans un même repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

❖❖ EXERCICE 07 ❖❖

Soient $f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$ et (\mathcal{C}_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

1- Déterminer D_f

2- Montrer que le point $I(0,1)$ est un centre de symétrie de (\mathcal{C}_f) .

3- Dresser le tableau de variation de f .

4- Tracer (\mathcal{C}_f) .

5- Montrer que f réalise une bijection de D_f sur un intervalle J que l'on précisera.

6- Déterminer $f^{-1}(x)$ et tracer $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$.

❖❖ EXERCICE 08 ❖❖

Soit $f(x) = xe^{-\sqrt{x}}$; $x \in \mathbb{R}_+$

1- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $f(x) = 4 \left(\frac{\frac{1}{2}\sqrt{x}}{e^{\frac{1}{2}\sqrt{x}}} \right)^2$

2- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

3-a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0

- b) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $\forall x \in]0, +\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{1}{2}(2 - \sqrt{x})e^{-\sqrt{x}}$
- c) Dresser le tableau de variation de f .
- 4- Tracer (\mathcal{C}_f) dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

❖❖ EXERCICE 09 ❖❖

Soient $f(x) = \ln|e^x - \sqrt{e^x}|$; $x \in \mathbb{R}^*$ et (\mathcal{C}_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

2- a) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R}^* et que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, on a : $f'(x) = \frac{2\sqrt{e^x} - 1}{2(\sqrt{e^x} - 1)}$

b) Dresser le tableau de variation de f

3- a) Montrer que pour tout $x \in]-\infty, 0[$, on a : $f(x) = \frac{x}{2} + \ln|1 - \sqrt{e^x}|$ et en déduire la branche infinie au voisinage de $-\infty$.

b) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a : $f(x) = x + \ln|1 - \sqrt{e^{\frac{x}{2}}}|$ et en déduire la branche infinie au voisinage de $+\infty$.

4- a) Soit g la restriction de f à $]0, +\infty[$. Montrer que g réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera.

b) Expliciter $g^{-1}(x)$

5- Tracer (\mathcal{C}_f) et $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ dans un même repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

❖❖ EXERCICE 10 ❖❖

Soit $f(x) = \int_0^{\frac{e^x - e^{-x}}{2}} \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}}$

1- Montrer que $D_f = \mathbb{R}$

2- a) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et calculer $f'(x)$

b) En déduire $f(x)$

3- Calculer $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}}$

❖❖ EXERCICE 11 ❖❖

Soit $F(x) = \int_0^x e^{-t} \sin(t) dt$; $x \in \mathbb{R}$

1- Montrer que $F(x) = \frac{1}{2} [1 - [\cos(x) + \sin(x)]e^{-x}]$

2- On pose $I_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-t} \sin(t) dt$; $k \in \mathbb{N}$ et $S_n = I_0 + I_1 + \dots + I_n$

a) Exprimer S_n à l'aide de F .

b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

3- a) Donner suivant la parité de k le signe de I_k (sans calculer I_k)

b) Calculer I_0 puis I_k .

c) Vérifier que $I_k = (-1)^k e^{-k\pi} I_0$

d) Calculer $T_n = |I_0| + |I_1| + |I_2| + \dots + |I_n|$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$

❖❖ EXERCICE 12 ❖❖

Soit $f(x) = e^{3x} - e^x$; $x \in \mathbb{R}$

1- Dresser le tableau de variation de f

2- a) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution $\alpha \in [0,1]$

b) Prouver que $\ln(1 + e^{-\alpha}) = 2\alpha$

3- Soit g la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par $g(x) = \frac{1}{2} \ln(1 + e^{-x})$

a) Montrer que $g(x) \geq 0$; $\forall x \in \mathbb{R}_+$

b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, on a : $|g'(x)| < \frac{1}{4}$

4- On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

❖❖ EXERCICE 13 ❖❖

Soit $I_n = \int_0^n x^n e^{-x} dx$; $n \in \mathbb{N}^*$

1- Calculer I_1 et I_2

2- Montrer que $I_n = e^{-n} n^n \int_0^n e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$

3- a) Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$, on a : $\ln(1-x) \leq -x - \frac{x^2}{2}$

b) En déduire que pour tout $t \in [0, n]$, on a : $e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{\frac{t^2}{2n}}$

4- a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{e^n}{n^n} I_n \leq \sqrt{2n} \int_0^{\sqrt{\frac{n}{2}}} e^{-u^2} du$

b) Montrer que pour tout $u \in [1, +\infty[$, on a : $e^{-u^2} \leq e^{-u}$

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on a : $\frac{e^n}{n^{n+1}} I_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}} \int_0^1 e^{-u^2} du + \sqrt{\frac{2}{n}} \left(e^{-1} - e^{-\sqrt{\frac{n}{2}}} \right)$

d) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{n^{n+1}} I_n$

❖❖ EXERCICE 14 ❖❖

-A-

On considère la fonction φ définie sur \mathbb{R} par $\varphi(x) = \begin{cases} -\ln(x+1) & \text{si } x \geq 0 \\ e^{-x} - 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $(\varphi \circ \varphi)(x) = x$

2- Etudier la continuité et la dérivabilité de φ sur \mathbb{R} .

3- Etudier les variations de φ et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

4- Montrer que l'équation $\varphi(x) = x$ admet une unique solution.

-B-

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \begin{cases} 1 + 2 \int_0^x e^{t-\ln(1+t)} dt & \text{si } x \geq 0 \\ 1 + 2 \int_0^x e^{t+e^{-t}-1} dt & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

1- Montrer que g est dérivable sur \mathbb{R} .

2- a) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}_+$, on a : $e^{t-\ln(1+t)} \geq \frac{1}{t+1}$

b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, on a : $g(x) \geq 1 + 2 \ln(1+x)$

c) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

3- a) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, on a : $e^{-t} + t - 1 \geq 0$

b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_-$, on a : $g(x) \leq 1 + 2x$

c) En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

4- Dresser le tableau de variation de g .

-C-

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = a \int_0^x e^{t+\varphi(t)} dt + b$; $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

1- Montrer que f est deux fois sur \mathbb{R} et que : $f''(x) - [1 + \varphi'(x)] f'(x) = 0$

2- Soient pour tout $x \in \mathbb{R}$; $u(x) = e^{x+\varphi(x)}$ et $v(x) = \int_0^{\varphi(x)} e^{t+\varphi(t)} dt + \int_0^x e^{t+\varphi(t)} dt$

a) Montrer que u et v sont les primitives d'une même fonction.

b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $\int_0^{\varphi(x)} e^{t+\varphi(t)} dt + \int_0^x e^{t+\varphi(t)} dt = e^{x+\varphi(x)} - 1$

❖❖ EXERCICE 15 ❖❖

-A-

Soit $g(x) = 1 + (x-1)e^x$; $x \in \mathbb{R}$

1- Montrer que $g(x) \geq 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$

2- Prouver que 0 est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$

-B-

Soient f la fonction définie par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
 et (\mathcal{C}_f) sa courbe représentative

dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

1- Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x]$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2- a) Montrer que f est continue en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0.

c) Dresser le tableau de variation de f .

3- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $J(x) = \int_0^x t e^{-t} dt$

a) Montrer que $J(x) = e^{-x} (e^x - x - 1)$

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\frac{x^2}{2} e^{-\frac{x+|x|}{2}} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2} e^{-\frac{x-|x|}{2}}$

c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $\frac{1}{2} e^{-\frac{x-|x|}{2}} \leq \frac{e^x - x - 1}{x^2} \leq \frac{1}{2} e^{\frac{x+|x|}{2}}$

d) En déduire que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\frac{1}{2}$

- 5- a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $f''(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^3} [(x-2)e^x + x + 2]$
- b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $f''(x) > 0$
- c) Tracer (\mathcal{C}_f)

-C-

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

1- Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution que l'on précisera.

- 2- a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$
- b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|u_{n+1} - \ln(2)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ln(2)|$
- c) En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

-D-

On considère la fonction F définie sur \mathbb{R} par : $\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} \frac{t}{e^t - 1} dt & \text{si } x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$

- 1- a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $\frac{2x^2}{e^{2x} - 1} \leq F(x) \leq \frac{x^2}{e^x - 1}$
- b) Montrer que F est continue en 0.
- c) Montrer que F est dérivable en 0 et que $F'(0) = 1$
- 2-a) Montrer que F est dérivable sur \mathbb{R}^* et que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$F'(x) = \frac{3 - e^x}{1 + e^x} f(x)$$

- b) Dresser le tableau de variation de F .