Lycée NAFTA — **Exercices corrigés** — Mme GUESMIA

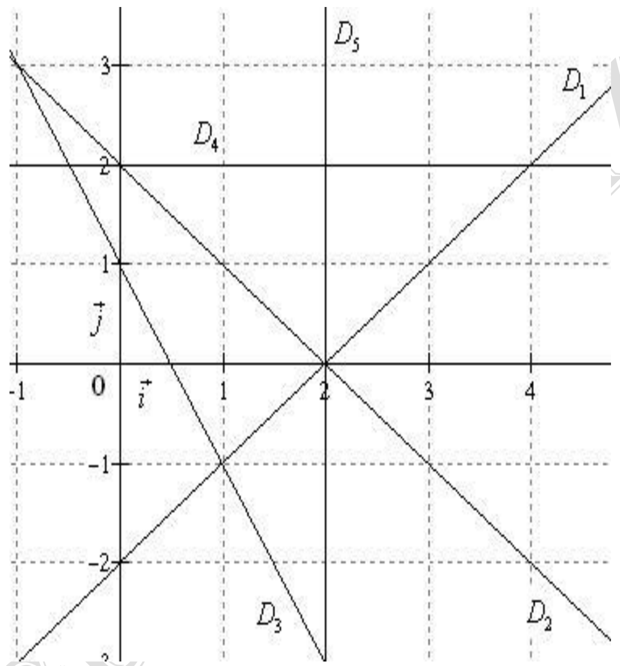
Avril 2011 — **Géométrie analytique** — $2^{ème}$ Tech. Inf.

Exercice n°1.

1) Dans un repère orthonormé$(O ; \vec{I} ; \vec{J})$, construire les droites d_1, d_2, d_3 dont les équations sont:

$d_1 : \quad y = 3x + 1$ $\qquad\qquad$ $d_2 : \quad y = -3$ $\qquad\qquad$ $d_3 : \quad x = 2$

2) On considère cinq droites dont les représentations dans le même repère orthonormé$(O ; \vec{I} ; \vec{J})$, figurent ci-dessous : Utilisez ce graphique pour déterminer les équations des cinq droites.



3) Déterminer une équation de la droite (AB) sachant que : A (1 ; -2) et B (-1 ; 3).

4) On considère la droite D dont une équation est : $y = \frac{2}{3}x + 1$. Parmi les équations ci-dessous, précisez celles qui sont des équations de la droite D.

Equation 1	Equation 2	Equation 3	Equation 4	Equation 5
$2x + y + 3 = 0$	$2x - 3y + 3 = 0$	$3y - 2x + 1 = 0$	$y - \frac{2}{3}x - 1 = 0$	$x = \frac{3}{2}y - 1$

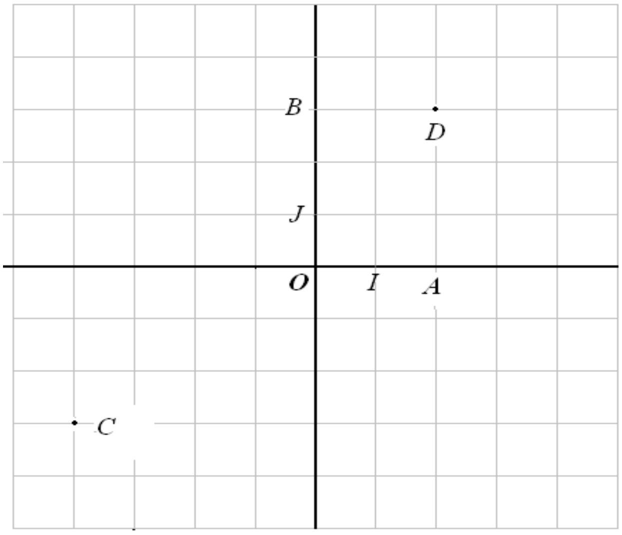
5) Parmi les droites suivantes, indiquer en justifiant celles qui sont parallèles et celles qui sont perpendiculaires.

$\Delta_1 : 2x + y - 1 = 0$ $\qquad$ $\Delta_2 : x + 2y + 1 = 0$ $\qquad$ $\Delta_3 : y = 2x - 3$ $\qquad$ $\Delta_4 : 3x + 6y + 2 = 0$

6) Donner une équation de la droite D' passant par K et parallèle à D_K.

$D_K : y = 5x + 2$ et $K(-1\,;5)$.

Exercice n°2



Donner les coordonnées des points C et D dans le repère (O, I, J). Puis dans le repère (O, A, B).

Exercice n°3

Le plan est muni d'un repère orthonormé$(O\,;\vec{I}\,;\vec{J})$. On considère les points A (3 ; 4) et B (-1 ; 7).

1) Calculer la longueur AB.

2) Le triangle OAB est-il isocèle ? Justifier.

3) Le point A est-il sur le cercle de centre C (-1 ; -3) et de rayon 8 ?

Exercice n°4

Le plan est muni d'un repère orthonormé$(O\,;\vec{I}\,;\vec{J})$.

On considère les points A (-5 ; 1), B (3 ; 6), C (-3 ; -2) et D (x ; 3) où x est un réel.

1) Déterminer la valeur de x pour que les droites (AB) et (CD) soient parallèles.

2) Faire une figure avec la valeur de x trouvée à la question 1).

3) Expliquer pourquoi ABDC est un parallélogramme.

4) Déterminer les coordonnées du centre I du parallélogramme ABDC.

5) Déterminer la fonction affine f dont la représentation graphique est la droite (AB).

Exercice n°5

Dans un repère orthonormé$(O\,;\vec{I}\,;\vec{J})$, on donne A (- 2; 3), B (1 ; 4) et C (4 ; -5).

Dans chacun des cas suivants, déterminer analytiquement les coordonnées (x ; y) du point M.

1) $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}$	2) M milieu de [AC]	3) $2\overrightarrow{AB} + 3\,\overrightarrow{CM} = \vec{O}$
4) ABCM est un parallélogramme	5)$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$	6) M est l'image de C par S_B.

Exercice n°6

Dans un repère $(O\,;\vec{I}\,;\vec{J})$ orthonormé, on considère les points : A (5 ; 6) et B (-1 ;-2).

1) Déterminer l'équation du cercle C de diamètre [AB].

2) Vérifier que le point D (-1; 6) appartient à C et déterminer une équation de la tangente T à C au point D.

Exercice n°7

Le plan étant muni d'un repère orthonormé$(O\,;\vec{I}\,;\vec{J})$.

1) Déterminer une équation du cercle C_1 de centre le point A (-2 ; 1) et de rayon 5.

2) Déterminer une équation du cercle C_2 de diamètre [BC] avec B (-1 ; 2) et C (3 ; -1).

3) Déterminer la nature de l'ensemble E_3 d'équation : $x^2 + y^2 + 7x - 8y + 8 = 0$.

4) Déterminer la nature de l'ensemble E_4 d'équation : $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 34 = 0$.

Exercice n°8.

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{I}\,;\vec{J})$,

1) Identifier l'ensemble E d'équation : $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 5 = 0$.

Etudier l'intersection de E et de la droite (d) d'équation : $x - 2y + 1 = 0$.

2) Identifier les ensembles E_1 d'équation : $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 13 = 0$; E_2 d'équation : $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 11 = 0$.

Déterminer les coordonnées des points d'intersection des deux ensembles : E_1 et E_2.

****

Lycée NAFTA | **Corrections des exercices** | Mme GUESMIA

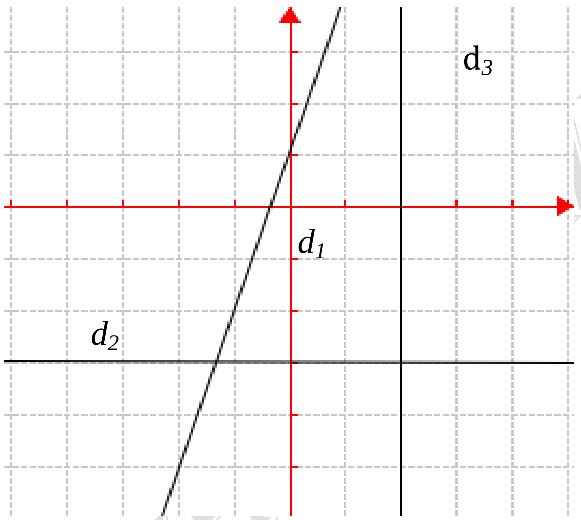
Avril 2011 | **Géométrie analytique** | $2^{ème}$ Tech.INF

<u>Exercice n°1</u>

1) **Pour construire une droite, deux points sont nécessaires. Puisqu'un point appartient à une droite si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de cette droite, on peut se donner une valeur pour x et calculer la valeur de y correspondante, en utilisant l'équation de la droite.*
Ainsi : Pour d_1 : $y = 3x + 1$ *on se donne* $x = 0$ *donc* $y = 3 \times 0 + 1 = 1$ *d'où le point* $A\,(0\,;1)$, *et si* $x = -2$ *alors* $y = 3x(-2) + 1 = -5$ *d'où le point* $B\big(-2\,;-5\big)$.

**La droite d_2 d'équation :* $y = -3$ *est constituée de tous les points dont l'ordonnée est égale à –3. Cette droite est donc parallèle à l'axe des abscisses.*

**La droite d_3 d'équation :* $x = 2$ *est constituée de tous les points dont l'abscisse est égale à 2. Cette droite est donc parallèle à l'axe des ordonnées.*



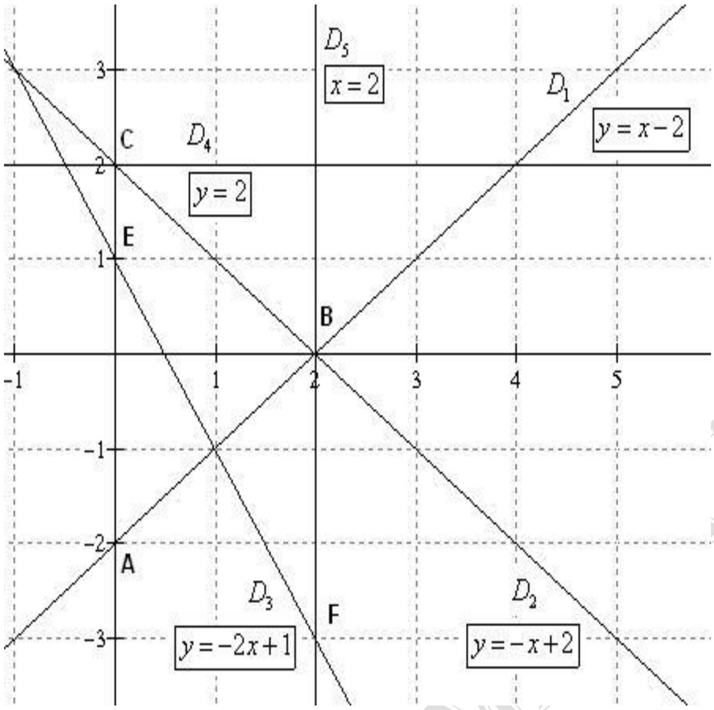
2) ** La droite D_1 n'étant pas parallèle à l'axe des ordonnées, une de ses équations est de la forme* $y = mx + p$. *On lit sur le graphique que l'ordonnée à l'origine vaut* $p = -2$.
Quant au coefficient directeur, on le calcule en utilisant les points $A(0\,;-2)$ *et* $B(2\,;0)$, *en appliquant la formule :* $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-(-2)}{2-0} = 1$. *L'équation de D_1 est ainsi :* $y = x - 2$.

**La droite D_2 n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, une de ses équations est de la forme* $y = mx + p$. *On lit sur le graphique que l'ordonnée à l'origine vaut* $p = 2$.
Quant au coefficient directeur, on le calcule en utilisant les points C (0 ; 2) et B (2 ; 0), en appliquant la formule : $m = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{0-2}{2-0} = 1$. *L'équation de D_2 est ainsi :* $y = -x + 2$.

**La droite D_3 n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, une de ses équations est de la forme* $y = mx + p$. *On lit sur le graphique que l'ordonnée à l'origine vaut* $p = 1$.
Quant au coefficient directeur, on le calcule en utilisant les points E (0 ; 1) et F (2 ; -3), en appliquant la formule : $m = \frac{y_F - y_E}{x_F - x_E} = \frac{-3-1}{2-0} = -2$. *L'équation de D_3 est ainsi :* $y = -2x + 1$.

* *La droite D_4 étant parallèle à l'axe des abscisses, une de ses équations est de la forme :* $y = p$. *(tous les points de cette droite ont la même ordonnée). On lit sur le graphique que* $p = 2$. *L'équation de D_4 est ainsi :* $y = 2$.

**La droite D_5 étant parallèle à l'axe des ordonnées, une de ses équations est de la forme* $x = a$. *(tous les points de cette droite ont même abscisse). On lit sur le graphique que* $a = 2$. *L'équation de D_5 est ainsi* $x = 2$.



3) *Puisque* $x_A \neq x_B$, *la droite (AB) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées. Une de ses équations est de la forme :* $y = mx + p$. *Pour calculer m, on utilise la formule :* $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-(-2)}{-1-1} = -\frac{5}{2}$. *L'équation de (AB) est donc de la forme* $y = -\frac{5}{2}x + p$. *Pour calculer p, on utilise les coordonnées d'un des deux points de (AB) : Dans l'équation :* $y = -\frac{5}{2}x + p$, *on remplace donc x et y par* x_A *et* y_A. *Ainsi :*

$$y_A = -\frac{5}{2}x_A + p \Leftrightarrow p = y_A + \frac{5}{2}x_A = -2 + \frac{5}{2}\times 1 = \frac{1}{2}$$

L'équation de (AB) est donc : $y = -\frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$

4) * $2x + y + 3 = 0 \iff y = -2x + 3$ *n'est pas une équation de D.*

* $2x - 3y + 3 = 0 \iff -3y = -2x - 3 \iff y = \frac{2}{3}x + 1$ *est une autre équation de la droite D.*

* $3y - 2x + 1 = 0 \iff 3y = 2x - 1 \iff y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ *n'est pas une équation de D.*

* $y - \frac{2}{3}x - 1 = 0 \iff y = \frac{2}{3}x + 1$ *est une autre équation de la droite D.*

* $x = \frac{3}{2}y - 1 \iff \frac{3}{2}y = x + 1 \iff y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$ *n'est pas une équation de D.*

5) * *Une autre équation de la droite* Δ_1 : $2x + y - 1 = 0$ *est* $y = -2x + 1$.

* *Une autre équation de la droite* Δ_2 : $x + 2y + 1 = 0$ *est* $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

* *Une équation de la droite* Δ_3 : *est* $y = 2x - 3$.

* *Une autre équation de la droite* Δ_4 : $3x + 6y + 2 = 0$ *est* $y == -\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$.

Les droites Δ_2 *et* Δ_4 *ayant même coefficients directeur, elles sont parallèles. Le produit des coefficients directeurs de* Δ_2 *et* Δ_3 *étant égal à –1, ces droites sont perpendiculaires. Il en est de même pour* Δ_3 *et* Δ_4.

6) Une équation de la droite D' est de la forme/ $y = mx + p$. *Puisque D' // D_K, ces droites ont même coefficient directeur, donc* $m = 5$. *L'équation de D' est donc de la forme :* $y = 5x + p$. *Pour déterminer p, on utilise les coordonnées du point A, c'est-à-dire*

$$y_A = 5x_A + p \Leftrightarrow p = y_A - 5x_A = 5 - 5\times(-1) = 10$$

L'équation de D' est $y = 5x + 10$.

<u>Exercice n°2</u>

Dans le repère orthonormé(O ; $\vec{I}$; $\vec{J}$*), les points C et D ont pour coordonnées : C (-4 ; -3) et D (2 ; 3).*

Dans le repère (O, A, B), les points C et D ont pour coordonnées : C (-2 ;-1) et D (1 ; 1).

<u>Exercice n°3</u>

1) *On calcule*

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-1-3)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

2) *On calcule OA et OB.*

$$OA = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$OB = \sqrt{(x_B - x_O)^2 + (y_B - y_O)^2} = \sqrt{(-1-0)^2 + (7-0)^2} = \sqrt{(-1)^2 + 7^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50}$$

Puisque OA = OB, le triangle OAB est isocèle en O.

3) *Le point A sera sur le cercle de centre C (-1 ;-3) et de rayon 8 si et seulement si CA = 8.*

On calcule

$$CA = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(3-(-1))^2 + (4-(-3))^2} = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}$$

Comme CA ≠ 8, on en conclut que le point A n'est pas sur le cercle de centre C (-1 ;-3) et de rayon 8.

<u>Exercice n°4</u>

1) *Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ *sont colinéaires.*

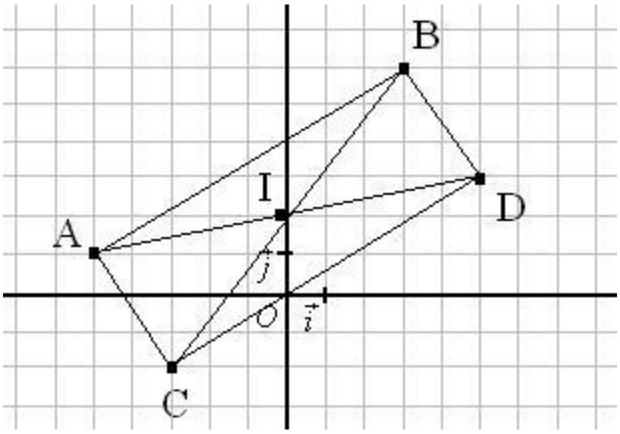
On calcule les composantes de chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$*:*

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A = 3-(-5) = 8 \\ y_B - y_A = 6 - 1 = 5 \end{pmatrix} \ ; \ \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} \ ; \ \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x_D - x_C = x-(-3) = x+3 \\ y_D - y_C = 3-(-2) = 5 \end{pmatrix} \ ; \ \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x+3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ *sont colinéaires si et seulement on a l'égalité des produits en croix :*

$$8 \times 5 - 5 \times (x + 3) = 0 \iff x + 3 = 8 \iff x = 5$$

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si : x = 5.



1) *Si* $x = 2$ *, les composantes de chacun des vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ *sont alors:*

$\overrightarrow{AB}\binom{8}{5}$ *et* $\overrightarrow{CD}\binom{x+3=8}{5}$; $\overrightarrow{CD}\binom{8}{5}$.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ *, ce qui prouve que le quadrilatère ABDC est un parallélogramme.*

2) *Le centre I du parallélogramme ABDC est le milieu commun de ses diagonales.*

Ses coordonnées sont : $x_I = \frac{x_A+x_D}{2} = \frac{-5+5}{2} = 0$ *et* $y_I = \frac{y_A+y_D}{2} = \frac{1+3}{2} = 2.$

Le centre du parallélogramme est donc le point I (0 ; 2).

3) *La fonction affine f dont la représentation graphique est la droite (AB) est de la forme :*

f (x) = m x+ p où m et p sont à déterminer. On a $y_I = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \frac{6-1}{3-(-5)} = \frac{5}{8}$.

Ainsi, $f(x) = \frac{5}{8}x + p.$

Le point B (3 ; 6) ∈ (AB), on aura donc f (3) = 6, ce qui se traduit par :

$\frac{5}{8} \times 3 + p = 6 \Leftrightarrow p = 6 - \frac{15}{8} = \frac{33}{8}$. *La fonction affine f dont la représentation graphique est la droite (AB) est donc :* $f(x) = \frac{5}{8}x + \frac{33}{8}$

<u>Exercice n°5</u>

Notons M (x_M ; y_M) *les coordonnées inconnues du point M.*

1) *Les composantes du vecteur* $\overrightarrow{BM}$ *sont données, en fonction de celles du point M par*

$\overrightarrow{BM}\binom{x_M-1}{y_M-4}$

Les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\binom{x_B-x_A}{y_B-y_A}$ *donc* $\overrightarrow{AB}\binom{3}{1}$, *on aura l'égalité* $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}$ *si et seulement si*

$$\begin{cases} x_M - 1 = 3 \\ y_M - 4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 4 \\ y_M = 5 \end{cases}$$

Le point M est donc M (4;5).

2) *M est le milieu de [AC] si et seulement si* $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ *. Les composantes du vecteur* $\overrightarrow{AM}\binom{x_M-x_A}{y_M-y_A}$ *c'est-à-dire* $\overrightarrow{AM}\binom{x_M+2}{y_M-3}$. *Les composantes du vecteur* $\overrightarrow{AC}$ *étant* $\overrightarrow{AC}\binom{x_C-x_A}{y_C-y_A}$; $\overrightarrow{AC}\binom{6}{-8}$ *celles de* $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ *sont* $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\binom{3}{-4}$ *et on aura l'égalité* $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ *si et seulement si*

$$\begin{cases} x_M + 2 = 3 \\ y_M - 3 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 1 \\ y_M = -1 \end{cases}.$$

Le point M est donc M (1; -1)

3) *Les composantes du vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *étant* $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ *c'est-à-dire* $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $2\,\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

De même pour $3\,\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix} 3x_M - 12 \\ 3y_M + 15 \end{pmatrix}$. $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CM} = \vec{0}$ *si et seulement si*

$$\begin{cases} 3x_M - 6 = 0 \\ 3y_M + 17 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 2 \\ y_M = -\dfrac{17}{3} \end{cases}.$$

Le point M est donc $M\left(2\ ;-\frac{17}{3}\right)$.

4) *ABCM est un* <u>*parallélogramme*</u> *si et seulement si* $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$ *équivaut à :*

$$\begin{cases} 4 - x_M = 3 \\ -5 - y_M = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 1 \\ y_M = -6 \end{cases}.$$

Le point M est donc M (1 ; -6)

5) $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)$ *si et seulement si*

$$\begin{cases} x_M - 1 = 0 \\ y_M - 4 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 1 \\ y_M = -1 \end{cases}.$$

Le point M est donc M (1;-1)

6) Si M est l'image de C par la symétrie de centre B, alors $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CB}$.

Les composantes du <u>*vecteur*</u> $\overrightarrow{BM}$ *sont données, en fonction de celles du point M par* $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x_M - x_B \\ y_M - y_B \end{pmatrix}$.

C'est-à-dire $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x_M - 1 \\ y_M - 4 \end{pmatrix}$, *et celles de* $\overrightarrow{CB}$ *étant* $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} x_B - x_C \\ y_B - y_C \end{pmatrix}$ *c'est-à-dire* $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix}$. *On aura l'égalité* $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CB}$ *si et seulement si*

$$\begin{cases} x_M - 1 = -3 \\ y_M - 4 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = -2 \\ y_M = 13 \end{cases}.$$

Le point M est donc M (-2 ; 13).

<u>*Exercice n°6*</u>

1) *On calcule les coordonnées du centre I du cercle C, qui est le milieu de [AB]*
(donc $x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = 2$ *et* $y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = 2$ *) ; ainsi que le rayon du cercle, qui vaut :*

$$\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} = \frac{\sqrt{100}}{2} = 5$$

L'équation de C est donc : $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 25$.

2) *Le point D appartient à C si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de C.*
On calcule $(x_D - 2)^2 + (y_D - 2)^2 = (-1 - 2)^2 + (6 - 2)^2 = (-3)^2 + 4^2 = 25$, *donc* $\boxed{\text{D est un point de C}}$

Un vecteur normal à la tangente T à C au point D est le vecteur : $\overrightarrow{ID}\begin{pmatrix} x_D - x_I = -1 - 2 = -3 \\ y_D - y_I = 6 - 2 = 4 \end{pmatrix}$

Une équation cartésienne de T est donc $a\,x + b\,y + c = 0$ *avec* $\overrightarrow{ID}\begin{pmatrix} -3 = a \\ 4 = b \end{pmatrix}$, *donc de la forme :*
$-4\,x + 3y + c = 0$. *On utilise les coordonnées du point D pour calculer le coefficient c :*

$$-3x_D+4y_D+c=0 \Leftrightarrow c=3x_D-4y_D=3\times(-1)-4\times 6=-27$$

Une équation de T est donc : $-3x+4y-27=0$.

Exercice n°7

1) Un point M (x ; y) appartient à C_1 si et seulement si AM = 5. En utilisant la formule de la distance dans un repère orthonormé, et l'équivalence AM = 5 <=> $AM^2 = 25$, on obtient :

$$M(x;y)\in C_1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2}=5 \Leftrightarrow \boxed{(x+2)^2+(y-1)^2=25}$$

2) On calcule les coordonnées du centre I du cercle, qui est le milieu de [BC] (donc $x_I = \frac{x_B+x_C}{2} = 1$ *et* $y_I = \frac{y_B+y_C}{2} = \frac{1}{2}$*), ainsi que le rayon du cercle, qui vaut :*

$$\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(4)^2+(-3)^2}=\frac{5}{2}$$

On se retrouve dans la situation de la question 1), ou on applique la formule du cours sur l'équation d'un cercle de centre et de rayon connu :

$$\boxed{(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{4}}$$

3) On transforme l'équation de E_3 :

$$x^2+y^2+7x-8y+8=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}+(y-4)^2-16+8=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{7}{2}\right)^2+(y-4)^2=\frac{81}{4}$$

On identifie E_3 comme étant le cercle de centre : $\omega(-\frac{7}{2}\ ;\ 4)$ *et de rayon :* $\sqrt{\frac{81}{4}}=\frac{9}{2}$

4) On transforme l'équation de E_4 :

$$x^2+y^2+6x-10y+34=0$$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2-9+(y-5)^2-25+34=0$$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2+(y-5)^2=0$$

Cette dernière égalité n'est possible que si et seulement si $\begin{cases}(x+3)^2 = 0\\ et (y-5)^2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-3\\ y=5\end{cases}$

L'ensemble E_4 est donc réduit au seul point S de coordonnées S (-3 ; 5).
(On peut aussi voir cet ensemble comme le cercle de centre S et de rayon égal à zéro).

Exercice n°8.

1) On transforme l'équation de E :

$x^2+y^2-4x+2y-5=0 \iff (x-2)^2-4+(y+1)^2-1-5=0$

$\iff (x-2)^2+(y+1)^2=10$

On identifie E comme étant le cercle de centre : ω *(2 ; -1) et de rayon* $\sqrt{10}$.

Pour étudier l'intersection du cercle E et de la droite (d) d'équation : x - 2y + 1 = 0, cherchons les couples (x ; y) solutions du système

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x+2y-5=0 & L_1 \\ x-2y+1=0 & L_2 \end{cases}$$

On résout ce système par substitution, en utilisant la ligne L_2 pour écrire :

$x-2y+1=0 \iff x=2y-1$. *On remplace, dans la ligne L_1 , x par* $2y-1$, *et on obtient une équation du second degré à une inconnue y :*

$$(2y-1)^2+y^2-4(2y-1)+2y-5=0 \iff (2y-1)^2+y^2-4(2y-1)+2y-5=0$$
$$\iff 4y^2-4y+1+y^2-8y+4+2y-5=0$$
$$\iff 5y^2-10y=0$$
$$\iff 5y(y-2)=0$$

Les solutions de cette équation sont : $y=0$ *donc* $x=-1$ *et* $y=2$ *donc* $x=3$

Les points d'intersection de E et (d) sont les points A et B de coordonnées A (-1 ; 0) et B (3 ; 2).

2) *On transforme l'équation de E_1 :*

$$x^2+y^2+2x-4y-13=0 \iff (x+1)^2-1+(y-2)^2-4-3=0$$
$$\iff (x+1)^2+(y-2)^2=18$$

On identifie E_1 comme étant le cercle de centre : $\omega_1(-1\,;\,2)$ *et de rayon* $\sqrt{18}$.

On transforme l'équation de E_2 : $x^2+y^2-6x+4y+11=0 \iff (x-3)^2+(y+2)^2=2$.

On identifie E_2 comme étant le cercle de centre: $\omega_2(3\,;\,-2)$ *et de rayon* $\sqrt{2}$.

Pour étudier l'intersection des deux cercles E_1 et E_2, cherchons les couples (x ; y) solutions du système :

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x-4y-13=0 & L_1 \\ x^2+y^2-6x+4y+11=0 & L_2 \end{cases}$$

En soustrayant les deux lignes, on obtient :

$$\begin{cases} 8x-8y-24=0 & L_1-L_2 \\ x^2+y^2-6x+4y+11=0 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-3=0 & L_1-L_2 \\ x^2+y^2-6x+4y+11=0 & L_2 \end{cases}$$

On résout ce système par substitution, pour écrire $x-y-3=0 \iff x=y+3$.

On remplace, dans la deuxième ligne, x par $(y+3)$, *et on obtient une équation du second degré à une inconnue :*

$$(y+3)^2+y^2-6(y+3)+4y+11=0 \iff (y+3)^2+y^2-6(y+3)+4y+11=0$$
$$\iff 2y^2+4y+2=0 \iff y^2+2y+1=0$$
$$\iff (y+1)^2=0 \iff y+1=0$$

Cette équation admet une unique solution : $y=-1$ *donc* $x=2$. *Les deux cercles n'admettent qu'un seul point d'intersection : le point A (2 ;-1). Ils sont tangents en ce point.*

****