YOUSSEFBOULILA – Parallélisme dans l'espace 2SC

I- Définitions du parallélisme.

Définition : On dit que deux **droites** sont **coplanaires** quand il existe un même plan qui les contient toutes les deux.

Définition : Deux **droites** sont **strictement parallèles** lorsqu'elles sont coplanaires et n'admettent aucun point commun.

Remarque : Deux droites coplanaires sont soit parallèles, soit sécantes.

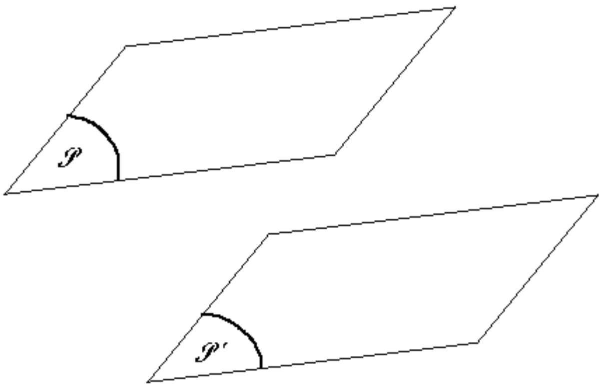
Définition : Deux **plans** sont **strictement parallèles** lorsqu'ils n'ont aucun point commun.

Définition : **Une droite et un plan** sont **strictement parallèles** lorsqu'ils n'ont aucun point commun.

II- Positions relatives

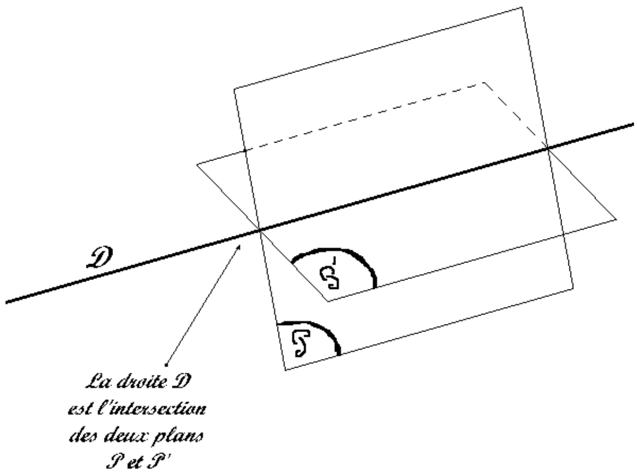
1- Positions relatives de deux plans

Deux plans de l'espace peuvent être confondus, (strictement) parallèles ou sécants.



Plans parallèles

Deux plans sont strictement parallèles lorsqu'ils n'ont aucun point en commun



Plans sécants

L'intersection de deux plans est une droite

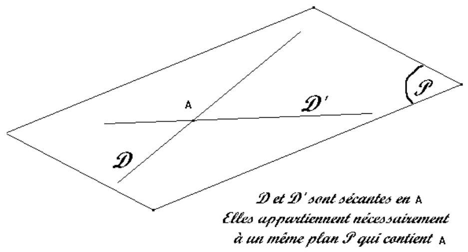
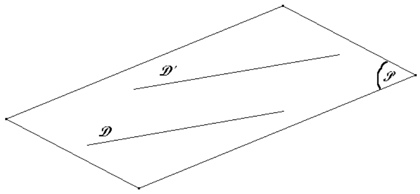
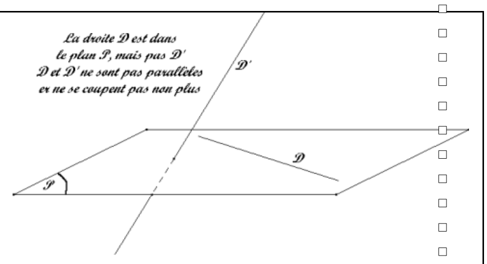
2- Positions relatives de deux droites.

Deux droites de l'espace peuvent être :

- Sécantes
- Parallèles

} Elles sont alors coplanaires

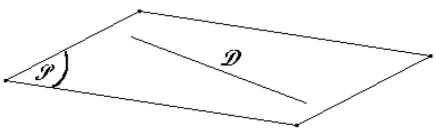
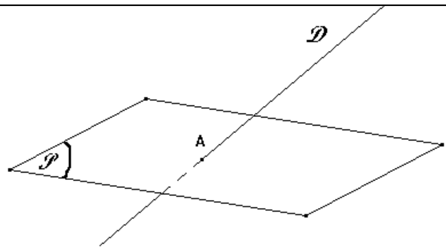
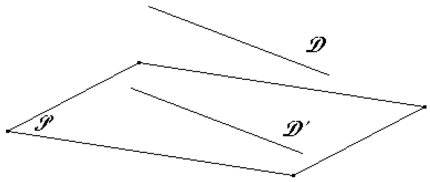
- Non-coplanaires

 Droites sécantes dans un plan P Propriété : 2 droites sécantes définissent un plan. (= il existe un plan et un seul qui contient deux droites sécantes données)	 Droites parallèles (contenues toutes deux dans un même plan P) Propriété : 2 droites strictement parallèles définissent un plan. (= il existe un plan et un seul qui contient deux droites strictement parallèles)	 Droites non coplanaires. Il n'existe pas de plan contenant ces deux droites à la fois.

⚠ Dans l'espace, deux droites qui n'ont pas de point commun ne sont pas nécessairement parallèles. Elles peuvent, aussi, être non coplanaires.

3- Positions relatives d'un plan et d'une droite.

Une droite D peut être :
- Contenue dans un plan P
- Sécante au plan P
- (strictement) Parallèle à P.

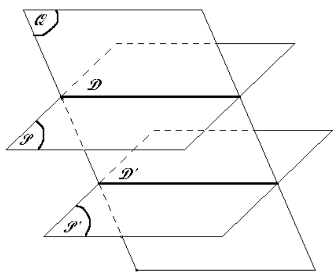
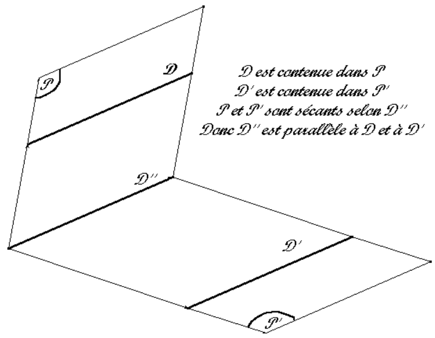
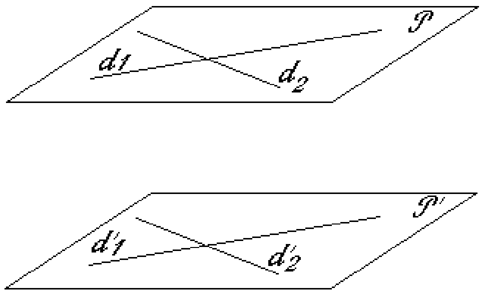
 D est contenue dans P Tous les points de la droite appartiennent au plan	 D est sécante à P D et P n'ont qu'un point commun La droite « perce » le plan.	 D est parallèle à P : Elle est parallèle à une droite D' contenue dans P D et P n'ont aucun point en commun. Une droite D est parallèle à un plan P quand elle est parallèle à une droite contenue dans P.

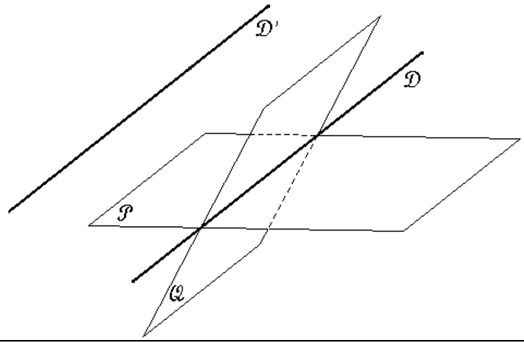
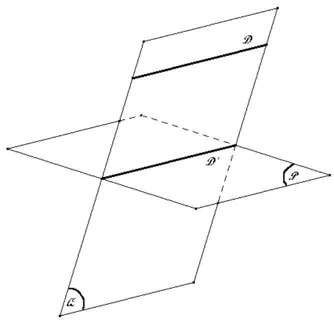
III- Propriétés du parallélisme dans l'espace.

Propriétés :

- Si deux plans sont parallèles, tout plan parallèle à l'un parallèle à l'autre.
- Si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les intersections sont des droites parallèles. = Théorème 1
- Si deux plans sont parallèles, toute droite qui coupe l'un coupe l'autre
- Si deux plans sont parallèles, toute droite parallèle à l'un est aussi parallèle à l'autre
- Si deux droites sont parallèles, tout plan sécant à l'une est aussi sécant à l'autre.
- Si deux droites sont parallèles, tout plan parallèle à l'une est aussi parallèle à l'autre.
- Si deux droites sont parallèles, toute droite parallèle à l'une est aussi parallèle à l'autre

⚠ Si deux droites sont parallèles, toute sécante à l'une n'est pas nécessairement sécante à l'autre (si elle ne se situe pas dans le même plan que les deux droites parallèles)

Théorème 1 : Lorsque deux plans P et P' sont parallèles, alors tout plan Q qui coupe P coupe aussi P', et les intersections de Q avec les plans P et P' sont deux droites parallèles. Ci-contre : P et P' sont parallèles. Q coupe P selon D Q coupe P' selon D' Donc D et D' sont parallèles.	
Théorème 2 : (Théorème « du toit ») Si D et D' sont deux droites parallèles, et que - D est contenue dans un plan P - D' est contenue dans un plan P' alors, si P et P' sont sécants, leur intersection est parallèle à D et à D'.	
Théorème 3 : Si deux droites sécantes d'un plan P sont parallèles, respectivement, à deux droites sécantes d'un plan P', alors les plans P et P' sont parallèles. Ci-contre : d_1 et d_2 sont deux droites sécantes contenues dans P. d'_1 et d'_2 sont deux de P', d'_1 étant parallèle à d_1 et d'_2 à d_2. P et P' sont donc parallèles.	

Théorème 4 : Si une droite D est parallèle à une droite D', alors tout plan contenant D est parallèle à D'. Ci-contre : D et D' sont parallèles. Les plans P et Q contiennent D. Donc les plans P et Q sont parallèles à D'.	
Théorème 5 : Si D est une droite parallèle à un plan P, alors tout plan Q contenant D et sécant à P coupe P selon une droite parallèle à D. Ci-contre : La droite D est parallèle au plan P. Le plan Q, contenant D, coupe P selon une droite D', qui est nécessairement parallèle à D.	

– Orthogonalité dans l'espace.

I- Définitions de la perpendicularité et de l'orthogonalité.

1- Droites perpendiculaires et droites orthogonales

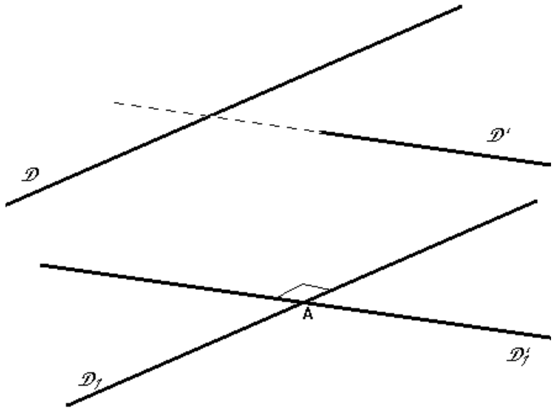
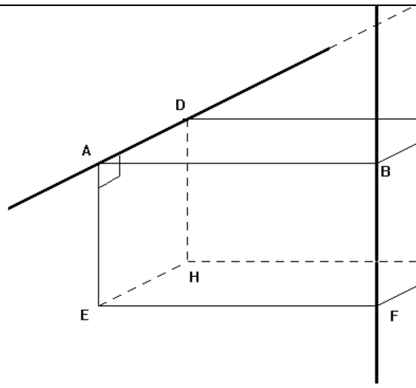
Définitions : Deux **droites** sont **perpendiculaires** lorsqu'elles se coupent en formant un angle droit. Deux **droites** sont **orthogonales** lorsque, si, par un point donnée, on trace leurs parallèles, ces parallèles sont perpendiculaires entre elles.

Remarque : Deux droites perpendiculaires sont nécessairement orthogonales.

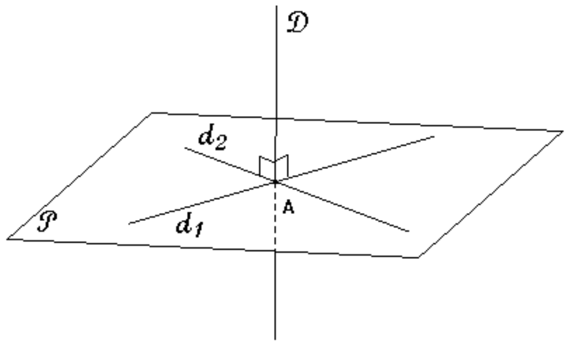
Mais deux droites orthogonales ne sont pas perpendiculaires si elles ne sont pas coplanaires.

Différence entre « perpendiculaire » et « orthogonal » en général :
Pour « perpendiculaire », il doit y une avoir intersection.
Des vecteurs orthogonaux, par exemple, ne se coupent pas nécessairement.

Illustration du cas général :	Illustration dans un parallélépipède rectangle :

	
D et D' sont non-coplanaires (considérez sur la figure que D' passe « en-dessous » de D). A est un point donné. On trace D_1, la parallèle à D passant par A. On trace D'_1, la parallèle à D' passant par A. Si D_1 et D'_1 forment un angle droit (en A), alors D et D' sont dites orthogonales.	ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle. (BF) et (AD), par exemple, sont non coplanaires mais cependant orthogonales. En effet, la parallèle à (BF) passant par A est (AE) et (AE) est perpendiculaire à (AD) dans le rectangle ADHE.

2- Plan et droite perpendiculaires



Définition : une **droite** D est **perpendiculaire à un plan** P quand elle est orthogonale à deux droites sécantes contenues dans P.

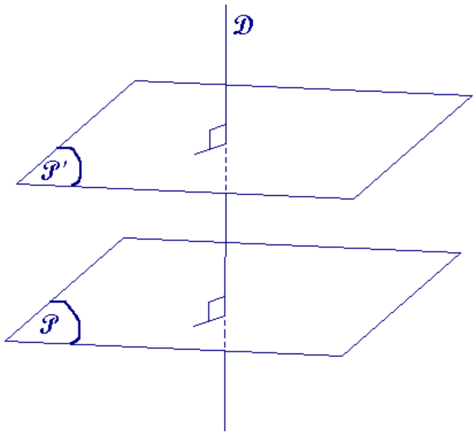
Ci-contre : La droite D est perpendiculaire,
- d'une part, à d_1 qui est contenue dans P
- d'autre part, à d_2 qui l'est aussi et qui coupe d_1.

Donc D est perpendiculaire à P.

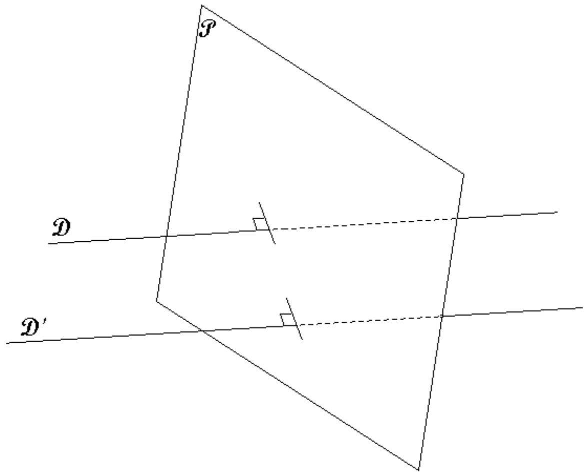
II- Propriétés

- **Deux plans orthogonaux à une même droite sont parallèles.**

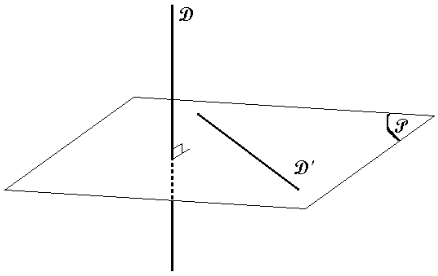
- **Si deux plans sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est aussi perpendiculaire à l'autre.**



- **Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles.**
- **Si deux droites sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'une est aussi perpendiculaire à l'autre.**



- **Si une droite D et un plan P sont orthogonaux, alors D est orthogonale à toute droite contenue dans P.**



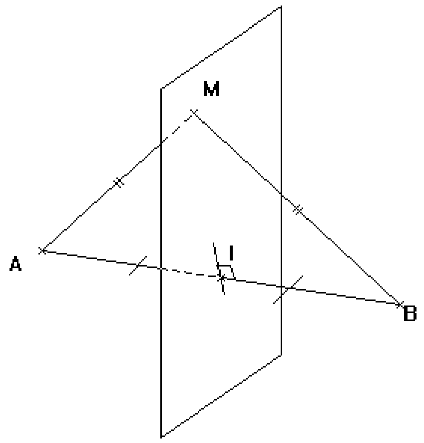
Ci-contre : D est orthogonale à P.
D' est contenue dans P.
Donc D et D' sont orthogonales.

III- Plan médiateur d'un segment. C'est l'équivalent de la médiatrice, dans l'espace.

Définitions :

1- Le **plan médiateur** d'un segment est le plan qui lui est **perpendiculaire** et passe par son **milieu**.

2- Le **plan médiateur** d'un segment [AB] est **l'ensemble des points du plan équidistants de A et de B**.



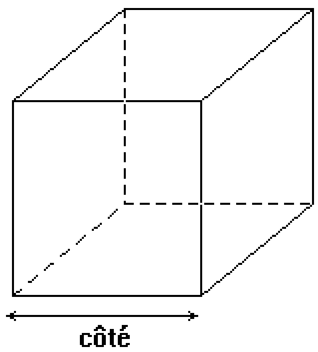
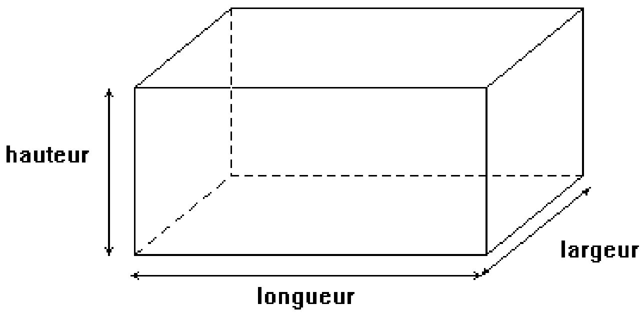
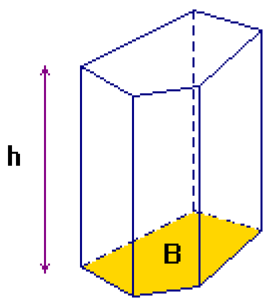
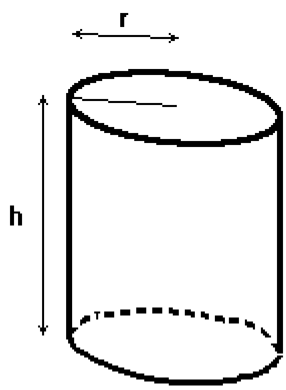
- Si un point M est sur le plan médiateur de [AB], alors AM = BM

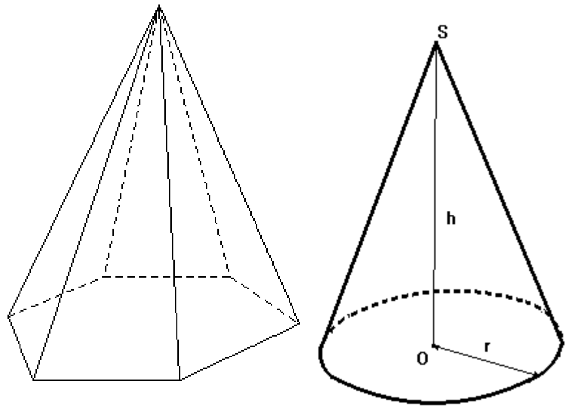
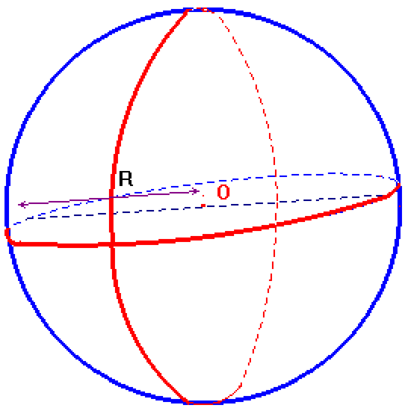
Réciproquement :

- Si un point M de l'espace est tel que

AM = BM, alors M est sur le plan médiateur de [AB]

Volumes des solides de l'espace
Formules à connaître parfaitement

Cube :  **Volume = côté ^{3}** (Volume = côté × côté × côté)	**Parallélépipède rectangle :**  **Volume = Longueur × largeur × hauteur**
Prisme (droit ou non) :  **Volume = Base × hauteur** **Volume = B × h**	**Cylindre :**  **Volume = Base × hauteur** **Volume = π r^2 × h**

Pyramide ou cône :	Sphère :
 **Volume =** $\frac{1}{3}$ **Base × hauteur** Pour le cône : **Volume =** $\frac{1}{3}\pi r^2 \times h$	 **Volume de la boule =** $\frac{4}{3}\pi R^3$ **Aire latérale de la sphère =** $4\pi R^2$