❖❖EXERCICE 01❖❖

Calculer les intégrales suivants :

$$\int_3^4 (x-1)dx \ ; \ \int_0^2 (x^2-2x+3)dx \ ; \ \int_{-\pi}^{\pi} 3dx \ ; \ \int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx \ ; \ \int_0^{2010} |\sin(x)|dx \ ; \ \int_{-3}^{4} |x+2|dx$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(x)\cos(x)dx \ ; \ \int_{-\pi}^{\pi} x^{2011}\sin^{2010}(x)dx \ ; \ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\cos^5(x)dx \ ; \ \int_{-1}^{2} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

$$\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\cos\left(\sqrt{x^2-1}\right)dx \ ; \ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(x)\,dx \ ; \ \int_2^3 \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}dx \ ; \ \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \sin[\sin(x)]\times\cos(x)\,dx$$

❖❖EXERCICE 02❖❖

Soit $f(x)=1+\tan(x) \quad ; \quad x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

1- a) Montrer que f réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle I que l'on précisera.

b) Montrer que $\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{x^2-2x+2}$

2- Montrer que $\displaystyle\int_1^2 \frac{4}{x^2-2x+2}dx=\pi$

❖❖EXERCICE 03❖❖

1- Linéariser $\sin^6(x)$

2- Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} [1-\cos(x)]^3[1+\cos(x)]^4\,dx$

Année Scolaire 2010-2011 *** Enseignant : Abdessattar El-Faleh

❖❖EXERCICE 04❖❖

Soit $F(x)=\int_{x}^{2x}\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$

1- Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$.

2- Déterminer le sens de variation de F.

3- En déduire le signe de $F(x)$ pour tout réel x.

❖❖EXERCICE 05❖❖

Soit $f(x)=(4-x^2)\sqrt{4-x^2}$; $x\in[-2,2]$

1- Etudier la continuité et la dérivabilité de f

2- En déduire $\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx$

3- Montrer que $\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx$

❖❖EXERCICE 06❖❖

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^n(x)}{\cos^2(x)}\,dx$; $n\in\mathbb{N}$

1- Calculer I_0 et I_1

2- a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$, on a : $0\le\frac{\sin^n(x)}{\cos^2(x)}\le\frac{4}{3\times2^n}$

b) En déduire $\lim_{n\to+\infty}I_n$

❖❖EXERCICE 07❖❖

Soient $u_n=\int_0^1 x^n\cos(x)\,dx$ et $v_n=\int_0^1 x^n\sin(x)\,dx$; $n\in\mathbb{N}^*$

1- Calculer u_1 et v_1.

2- Etudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

3- On admet que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes.

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$u_{n+1}=\sin(1)-(n+1)v_n \quad\text{et}\quad v_{n+1}=-\cos(1)+(n+1)u_n$$

b) En déduire que :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = \cos(1)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nv_n = \sin(1)$

❖❖EXERCICE 08❖❖

Soit $g(x) = \cos(x) + \cos^2(x)$; $x \in [0, \pi]$

1- Etudier et représenter graphiquement la fonction g dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

2- Calculer l'aire de la surface délimitée par ($\mathscr{C}_g$) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \pi$.

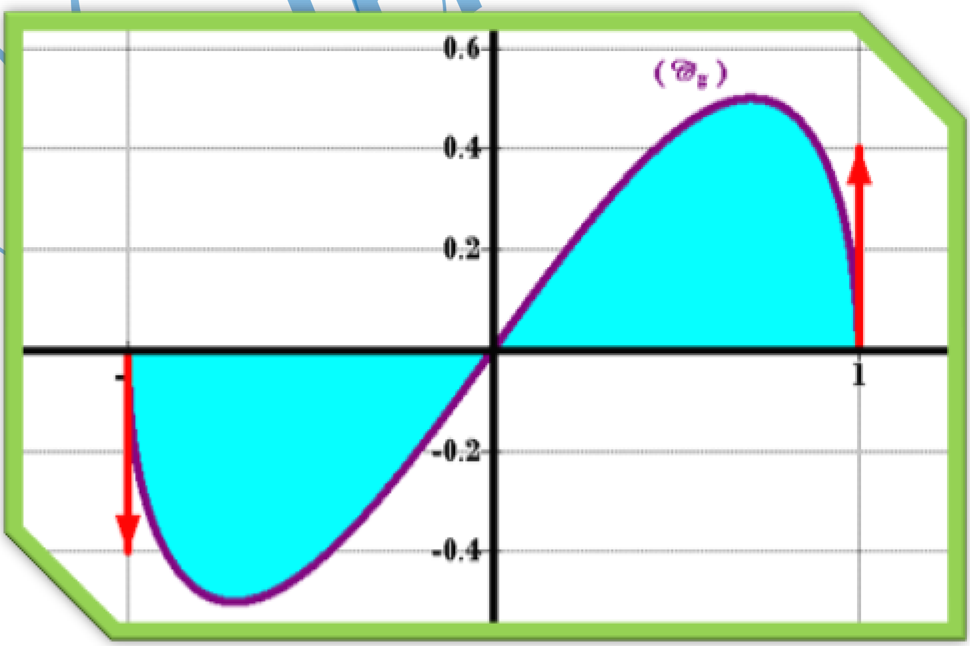
3- Calculer la moyenne $\bar{g}$ de g sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

❖❖EXERCICE 09❖❖

On donne la représentation graphique de la fonction g définie sur $[-1, 1]$ par $g(x) = x\sqrt{1 - x^2}$

1- Calculer l'aire S de la partie colorée (en u.a).

2- Calculer le volume V (en u.v) du solide engendré par rotation de ($\mathscr{C}_g$) autour de l'axe des abscisses.



❖❖EXERCICE 10❖❖

Soient $f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin[2(n+1)x]}{\sin(x)} & \text{si } x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right] \\ 2n+2 & \text{si } x=0\end{cases}$ et $u_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx$; $n\in\mathbb{N}$

1- a) Montrer que f_n est continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

b) Montrer que $u_{n+1}-u_n=\dfrac{2(-1)^{n+1}}{2n+3}$; $\forall n\in\mathbb{N}$ et calculer u_0 , u_1 et u_2

2- a) Montrer que $u_n=2\sum_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{2k+1}$. Calculer $\int_0^1 dx$ et $\int_0^1 x^{2k}\,dx$;$(k\in\mathbb{N}^*)$

b) En déduire que $u_n=2\int_0^1\dfrac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}dx$

c) Etablir que $\left|u_n-2\int_0^1\dfrac{dx}{1+x^2}\right|\leq\dfrac{2}{2n+3}$

d) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

3- Soit φ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On considère la fonction F définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $F(x)=\int_0^{\tan(x)}\dfrac{\varphi(t)}{1+t^2}dt$

a) Montrer que F est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ et que $F'(x)=\varphi[\tan(x)]$

b) Déterminer $F(x)$ dans chacun des cas suivants : $\varphi(t)=t$ et $\varphi(t)=t^2$

c) En déduire $\int_0^1\dfrac{dt}{1+t^2}$ et $\int_0^1\dfrac{t^2}{1+t^2}dt$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

4- Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases}v_0=\int_0^1\dfrac{dt}{1+t^2} \\ v_n=\int_0^1\dfrac{t^{2n}}{1+t^2}dt \;;\; n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $0\leq v_n\leq\dfrac{1}{2n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$

b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $v_{n+1}+v_n=\dfrac{1}{2n+1}$. En déduire v_2 et v_3 .