❖❖EXERCICE 01❖❖

Soit $f:[0,\pi]\to[0,1]$; $x\mapsto\cos(x)$

1- Montrer que f est une bijection

2- Calculer $f^{-1}(-1)$; $f^{-1}(0)$; $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$; $f^{-1}(1)$ et $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3- Tracer $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_{f^{-1}})$ dans un même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

❖❖EXERCICE 02❖❖

Soit $h(x)=1+\sqrt{2x-4}$; $x\in\mathbb{R}$

1- Déterminer D_h

2- Montrer que h est continue sur D_h

3- Etudier la dérivabilité de h en 2 . Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

4- Montrer que h réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.

5- Déterminer $h^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$

❖❖EXERCICE 03❖❖

Soit $g(x)=\tan(x)$; $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

1- Montrer que g réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle I que l'on précisera.

2- Calculer $g^{-1}(0)$et $g^{-1}(1)$.

3- Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$.

4- Montrer que $\left(g^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$; $\forall x\in\mathbb{R}$

❖❖EXERCICE 04❖❖

Soit $\varphi(x)=\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$

1- Déterminer D_φ .

2- Etudier la dérivabilité de φ à gauche en 1 .Interpréter graphiquement le résultat obtenu .

3- Etudier la dérivabilité de φ sur $]0,1[$.

4- Dresser le tableau de variation de φ

5- Montrer que φ réalise une bijection de $]0,1[$ sur un intervalle I que l'on précisera.

6- Expliciter $\varphi^{-1}(x)$ pour tout $x\in I$

❖❖EXERCICE 05❖❖

Soit υ la fonction définie sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ par $\upsilon(x)=\frac{1}{\sin(x)}$

On désigne par (ξ_υ) la courbe représentative de υ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1- Etudier les variation de υ puis construire sa courbe

2- Montrer que υ réalise une bijection de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[1,+\infty[$.

3- On désigne par ϖ la fonction réciproque de υ

a) Montrer que ϖ est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que $\varpi'(x)=\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

b) Calculer $\varpi(1)$; $\varpi(\sqrt{2})$ et $\varpi(2)$ puis tracer ($\mathscr{C}_\varpi$).

❖❖EXERCICE 06❖❖

Soit $\tau(x)=x+\sqrt{x^2-4}$; $x\in[2,+\infty[$

1- Dresser le tableau de variation de τ.

2- Montrer que τ réalise une bijection de $[2,+\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera.

3- Soit τ^{-1} la réciproque de τ.

a) Déterminer le sens de variation de τ^{-1} sur I.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\tau^{-1}(x)$; $\tau^{-1}(2)$

c) Calculer $\tau(3)$ puis $(\tau^{-1})'(3+\sqrt{5})$

d) Expliciter $\tau^{-1}(x)$ pour tout $x\in I$.

❖❖EXERCICE 07❖❖

Soit f la fonction définie sur $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$ par $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}$

1- Montrer que f réalise une bijection de $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$ sur un intervalle I que l'on caractérisera.

2- Montrer que pour tout $x\in I$, on a : $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-\frac{3}{4}}$

3- On considère la fonction g définie sur $[0,1[$ par $g(x)=f^{-1}\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2\cos\left(\dfrac{2x}{\pi}\right)}\right]$

a) Montrer que pour tout $[0,1[$, on a : $g(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$

b) Montrer que g réalise une bijection de $[0,1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

c) Expliciter $\left(g^{-1}\right)'(x)$ pour tout $x\in J$.

❖❖EXERCICE 08❖❖

Le tableau de variation suivant est le tableau de variation d'une fonction f

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	0	$-$	||	$-$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\nearrow$	$-1/4$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2

On pose $f(x)=\dfrac{ax^2+1}{x^2+b}$; $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

1- En utilisant le tableau de variation de f déterminer a et b

2- Soit g la restriction de f à $[0,2[$

a) Montrer que g réalise une bijection de $[0,2[$ sur un intervalle I que l'on précisera.

b) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in I$.

❖❖EXERCICE 09❖❖

Soit $f(x)=-1+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; $x\in]-1,1[$

A

1- Dresser le tableau de variation de f.

2- Construire (ξ_f) tout en précisant ses points d'intersection avec les axes du repère.

3- a) Montrer que f réalise une bijection de $]-1,1[$ sur un intervalle I que l'on précisera.

b) Construire $(\xi_{f^{-1}})$ dans le même repère.

c) Expliciter $f^{-1}(x)$ en fonction de x.

B

1- On pose $\varphi(x)=f(x)-x$, $\forall x\in]-1,1[$.

a) Dresser le tableau de variation de φ.

b) En déduire l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution $\alpha \in \left]\frac{4}{5},1\right[$.

c) Donner le signe de $\varphi(x)$ pour $x \in]-1,1[$.

2- On définie la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $U_0 \in [0,\alpha]$ et $U_{n+1} = f^{-1}(U_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, On a : $U_n \in [0,\alpha]$.

b) Montrer que $\forall x \in [0,\alpha]$, on a : $f^{-1}(x) \geq x$.

c) En déduire que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement monotone et qu'elle est convergente vers une limite que l'on déterminera.

C

Soit $h(x) = f\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}(x+1)\right)\right]$; $x \in]-1,1[$

1- a) Montrer que $\forall x \in]-1,1[$, on a : $h(x) = -1 + \cot an\left[\frac{\pi}{2}(x+1)\right]$.

b) Montrer que h réalise une bijection de $]-1,1[$ sur $\mathbb{R}$.

c) Justifier la dérivabilité de h^{-1} sur $\mathbb{R}$ et montrer que $\left(h^{-1}\right)'(x) = \dfrac{-2}{\pi\left[1+(x+1)^2\right]}$

2- On pose $H(x) = h^{-1}(x-1) + h^{-1}\left(\frac{1}{x}-1\right)$; $\forall x \in \mathbb{R}^*$

a) Montrer que H est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $H'(x)$.

b) Calculer $h\left(-\frac{1}{2}\right)$ et $h\left(\frac{1}{2}\right)$.

c) En déduire que $\forall x > 0$, on a : $H(x) = -1$ et que $\forall x < 0$, on a : $H(x) = 1$.

3- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $V_n = \sum_{k=1}^{n}\left[h^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) + h^{-1}\left(-\frac{1}{k}\right)\right]$ et $W_n = \dfrac{V_n}{n}$.

a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, on a : $h^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) + h^{-1}\left(-\frac{1}{k+1}\right) = -1$.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $V_n = -n - h^{-1}\left(-\frac{1}{n+1}\right)$.

c) Montrer que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite que l'on déterminera.