EXERCICE 01

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}\ ;\ \lim_{x\to+\infty}x\ln\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right)\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\cos\left[\ln(x)\right]}{x}\ ;\ \lim_{x\to0^+}\frac{2\ln(x)-x}{\ln^2(x)+3}\ ;\ \lim_{x\to0}\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}$$

$$\lim_{x\to0^+}x\left[\ln(x)\right]^3\ ;\ \lim_{x\to0^+}\sin(x)\ln(x)\ ;\ \lim_{x\to-\infty}x^2\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left[1+\ln(x)\right]}{x}$$

EXERCICE 02

Etudier la parité des fonctions suivantes :

$$f(x)=x^2\ln|x|\ ;\ g(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\ ;\ h(x)=x\ln\left(|x|-1\right)\ ;\ l(x)=\frac{\cos(x)}{\ln\left(x^2+1\right)}+\sqrt{-|x|}$$

EXERCICE 03

On a représenter ci-dessous deux courbes représentatives $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ d'une fonction f et de sa primitive F définie sur $\mathbb{R}$.

1- Prouver que $(\mathscr{C}_2)$ est la courbe de f.

2- Calculer la valeur moyenne de f sur $[0,1]$

3- Calculer l'aire de partie colorée.

4- Soit $G(x)=\int_0^x f(t)\,dt$

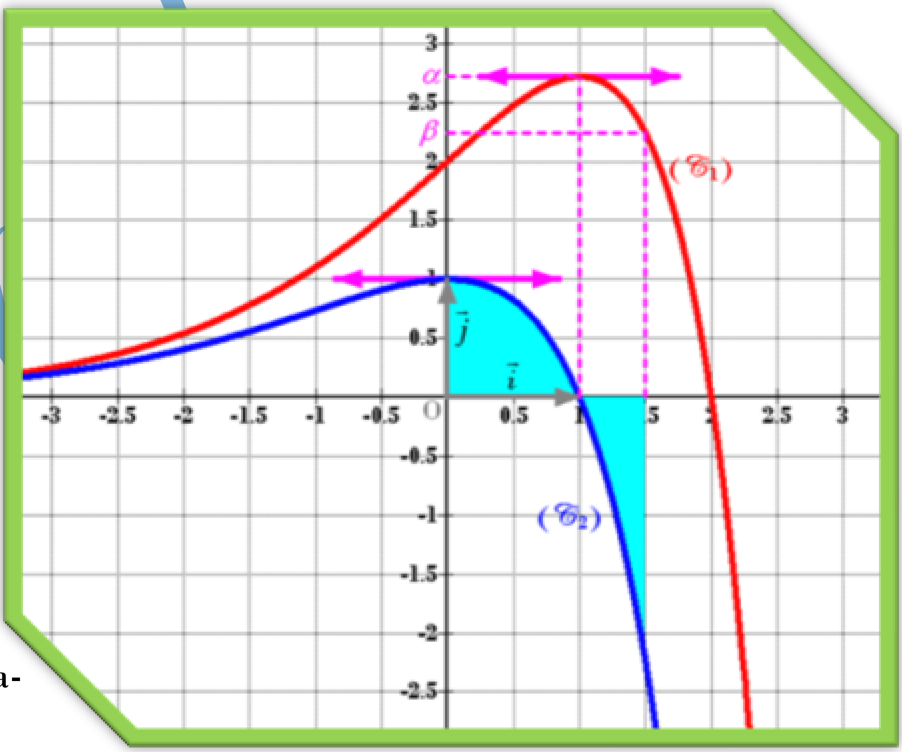
a) Etudier le sens de variation de G

b) Montrer que la représentation graphique (Γ) de G est l'image est l'image de $(\mathscr{C}_1)$ par la translation de vecteur $-2\vec{j}$

5- Soit h la fonction définie par $h(x)=\ln\left[f(x)\right]$

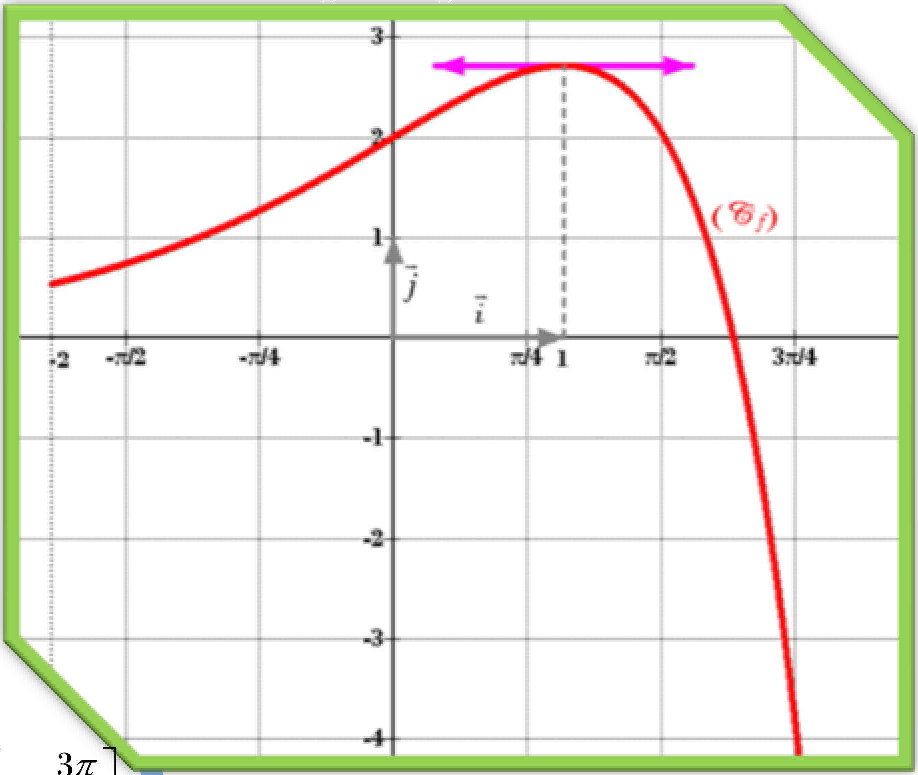
a) Déterminer D_h

b) Dresser le tableau de variation de h.



❖❖EXERCICE 04❖❖

Soit $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\left[-2, \frac{3\pi}{4}\right]$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et on désigne par F une primitive de f sur $\left[-2, \frac{3\pi}{4}\right]$.



Soit $(\mathscr{C}_F)$ la courbe de F

Cocher la réponse juste :

1- La tangente à $(\mathscr{C}_F)$ au point d'abscisse 0 est parallèle à la droite d'équation :

a) $y = 2x - 1$ ☐

b) $y = -x + 2$ ☐

c) $y = x - 1$ ☐

2- La courbe $(\mathscr{C}_F)$ admet sur $\left[-2, \frac{3\pi}{4}\right]$

a) Deux points d'inflexions ☐

b) Un point d'inflexion ☐

c) Aucun point d'inflexion ☐

3- Le tableau de variation de F sur $\left[-2, \frac{3\pi}{4}\right]$ est de la forme :

x	-2	2	$+\infty$
$F(x)$	↗		↘

a) ☐

x	-2	2	$+\infty$
$F(x)$	↘		↗

b) ☐

x	-2	2	$+\infty$
$F(x)$	↗		

c) ☐

EXERCICE 05

1- Soit f une fonction continue et impaire sur $[-2,2]$ alors $\int_{-2}^{2}\left[\sqrt{3}+f(x)\right]dx$ est égale à :

a) $4\sqrt{3}$ ☐ ; b) 0 ☐ ; c) $-4\sqrt{3}$ ☐

2- Soit g la fonction définie par $g(x)=\int_{0}^{x}\frac{1}{1+t^2}\,dt$ alors :

a) $g(x)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ ☐ ; b) $g(x)\leq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ ☐ ; c) $g(x)$ change de signe sur $\mathbb{R}$ ☐

EXERCICE 06

Soit $f(x)=\frac{1}{9-x^2}$

1- Montrer qu'il existe deux réels a et b tel que $f(x)=\frac{a}{3-x}+\frac{b}{3+x}$; $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{\pm 3\}$

2- Calculer $\int_{-1}^{1}f(x)dx$ puis $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin(2x)}{9-\cos^2(2x)}dx$

EXERCICE 07

Soit $f(x)=\ln\left|\sqrt{x}-1\right|$

1- Déterminer D_f

2- Calculer $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$

3- Etudier la dérivabilité de f sur $D_f\setminus\{0\}$ et dresser son tableau de variation.

4- Etudier la dérivabilité de f en 0^+ .Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

5- Déterminer les branches infinies de $(\mathscr{C}_f)$

6- Construire $(\mathscr{C}_f)$

EXERCICE 08

Soit $f(x)=\begin{cases} x\left(1-\ln(x)\right)^2 & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$

1- Déterminer D_f

2- Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$ et étudier la continuité de f à droite en 0

3- Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 .Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

4- Dresser le tableau de variation de f .

5- Construire $(\mathscr{C}_f)$

❖❖EXERCICE 09❖❖

Soit $g(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

1- Déterminer D_g

2- Etudier la parité de g

3- Dresser le tableau de variation de g

4- Montrer que g réalise une bijection de D_g sur un intervalle I que l'on précisera.

5- Construire ($\mathscr{C}_g$) et ($\mathscr{C}_{g^{-1}}$) dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

❖❖EXERCICE 10❖❖

Soit $h(x)=\ln\left(x^2-3x\right)$

1- Déterminer D_h

2- a) Montrer que pour tout $x\in D_h$, on a : $h(3-x)=h(x)$

b) Conclure

3- Etudier la dérivabilité de h sur D_h et dresser son tableau de variation.

4- Construire ($\mathscr{C}_h$) on précisons l'intersection de ($\mathscr{C}_h$) avec l'axe des abscisses.

❖❖EXERCICE 11❖❖

Soit $\varphi(x)=x-\ln(x)\quad ;\quad x\in\left]0,+\infty\right[$

1- a) Dresser le tableau de variation de φ

b) En déduire que pour tout $x\in\left]0,+\infty\right[$, on a : $\varphi(x)\geq 1$

2- Soit f la fonction définie sur $\left[0,+\infty\right[$ par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-\ln(x)} & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$

a) Etudier la continuité de f sur $\left[0,+\infty\right[$.

b) La fonction f est elle dérivable à droite en 0 ?

3- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n=\displaystyle\int_1^n \frac{x}{x-\ln(x)}dx$

a) Montrer que pour tout $x\in\left[1,+\infty\right[$, on a : $\dfrac{x}{x-\ln(x)}\geq 1$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

❖❖EXERCICE 12❖❖

La courbe ci-dessous est la représentation graphique dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

1-a) Dresser le tableau de variation de f

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1-f(x)}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1-f(x)}$; $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{1-f(x)}$ et $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{1-f(x)}$

2- Soit $g(x)=\ln\left[f(x)\right]$

a) Déterminer D_g

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$; $\lim\limits_{x\to(-1)^-}g(x)$ et $\lim\limits_{x\to(-1)^+}g(x)$

c) Dresser le tableau de variation de g

❖❖EXERCICE 13❖❖

Soit $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$; $x\in\left]-1,1\right[$

1- a) Etudier la parité de f

b) Montrer que f est dérivable sur $\left]-1,1\right[$ et calculer $f'(x)$

c) Etudier et représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

2- Soit $\mathscr{A}$ l'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par $(\mathscr{C}_f)$ et les droites d'équations respectives $x=0$, $x=\frac{1}{2}$ et $y=0$. Calculer $\mathscr{A}$

3- Soit $g(x)=f[\sin(x)]$; $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

a) Montrer que g est une primitive sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ de la fonction : $h:t\mapsto\frac{1}{\cos(t)}$

b) En déduire $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dt}{\cos(t)}$

4- On considère la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $J_0=I$ et $J_n=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{[\sin(t)]^{2n}}{\cos(t)}dt$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$

On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$, $K_n=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left[\frac{1}{4^n\cos(t)}-\frac{[\sin(t)]^{2n}}{\cos(t)}\right]dt$

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $K_n\geq 0$

b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $0\leq J_n\leq\frac{\ln(a)}{b^n}$ où a et b sont deux réels à préciser.

c) Montrer que $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.