Exercice 1:*(principale 2010)*

Répondre par vrai ou faux

1.le quotient de (-23) par (-5) est 4.
2.a et b sont deux entiers tels que 64a + 9b = 1 alors b et 64 sont premiers entre eux.
3. $147^{146} \equiv 2 \pmod{12}$
4. $x^2 \equiv 0 \pmod 8$ *équivaut à* $x \equiv 0 \pmod 8$
5. *Si* $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 4 \\ x \equiv 4 \pmod 5 \end{cases}$ *alors* $x \equiv 19 \pmod{20}$
6.Si p est un entier premier distinct de 2 alors $p^2 \equiv 1 \pmod 4$.
7. (contrôle 2008) Choisir la réponse exacte
Soit n un entier non nul tel que (5n) Λ *(3² x 5² x 7) = 35.Alors*
a. $n \equiv 0 \pmod 3$ *b.* $n \equiv 0 \pmod 5$ *c.* $n \equiv 0 \pmod 7$

Exercice 2:

1.Trouvez, suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division euclidienne de 3^n *par 8.*
2.Quel est l'ensemble des entiers naturels n tels que le nombre $n.3^n - 9n + 2$ *est divisible par 8 ?*

Exercice 3:

Soit x un entier relatif.
1.a.Déterminer tous les restes possibles de x^3 *modulo 9.*
b.Donner deux valeurs de l' entier a tel que : $x^3 \equiv a^3$ *(mod 9) si et seulement si* $x \equiv a$ *(mod 3).*
2.x,y et z sont trois entiers relatifs tels que $x^3+y^3+z^3$ *est divisible par 9.*
Montrer que l'un des nombres x , y ou z est divisible par 3.

Exercice 4:

Soit le nombre $A = 2011^{2010} - 1$
1.Déterminer les restes respectifs modulo 4 et modulo 5 de A.
2.En déduire que A est divisible par 20.

Exercice 5:

Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 7.On pose $n = p^4 - 1$.
1.a.Montrer que l'on ait $p \equiv 1$ *(mod 3) ou* $p \equiv -1$ *(mod 3).*
b.En déduire que n est divisible par 3.
2.a.Vérifier que p est impair.En déduire qu'il existe un entier naturel k tel que p² -1 = 4k(k+1).
b.En déduire que n est divisible par 16.
3.a.Quel sont les restes possibles de p modulo 5 ?
b.En déduire que 5 divise n. et par suite que 240 divise n.

voir verso ⇒

Exercice 6:

Pour tout entier $n \geq 5$, on considère le nombres $a = n^3 - n^2 - 12n$ et $b = 2n^2 - 7n - 4$.
1.Montrer que a et b sont divisible par n -4.
2.On pose d = PGCD (2n+1 , n+3).
a.Montrer que d divise 5.
b.Montrer que (2n+1) et (n+3) sont multiples de 5 si et seulement si (n-2) est multiple de 5.
3.Montrer que 2n+1 et n sont premiers entre eux.
4.a.Déterminer ,suivant les valeurs de n et en fonction de n,PGCD(a,b).
b.Vérifier le résultat pour n = 11 et n = 12.

Exercice 7:

1.On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : 11n – 24m = 1.
a.Vérifier que cette équation admet au moins une solution.
b.En utilisant l'algorithme d'Euclide déterminer un couple (m,n) solution de (E).
c.Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E)
2.a.Justifier que 9 divise $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$
b. Montrer que si (m,n) est solution de (E) alors ($10^{11n} - 1) - 10(10^{24n} - 1) = 9$.
c.Montrer que $10^{11} - 1$ divise $10^{11n} - 1$ (on pourra utiliser la factorisation de $a^n - b^n$).
d.En déduire qu'il existe deux entiers M et N tels que $(10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M = 9$
e.Montrer que tout diviseur commun à $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$ divise 9.
f.En déduire $(10^{11} - 1) \wedge (10^{24} - 1)$.

Exercice 8 : *(Principale 2008)*

1.Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : 3x – 8y = 5.
Montrer que les solutions de (E) sont les couples (x , y) tels que x = 8k – 1 et y = 3k – 1.
2.a.Soient n , x et y rois entiers tels que $\begin{cases} n = 3x + 2 \\ n = 8y + 7 \end{cases}$ .Montrer que (x , y) est une solution de (E).
b.On considère le système $(S)\begin{cases} n \equiv 2 \pmod 3 \\ n \equiv 7 \pmod 8 \end{cases}$ où n est un entier.
Montrer que n est solution du système (S) si et seulement si $n \equiv 23 \pmod{24}$.
3.a.Soit k un entier naturel.Déterminer le reste de 2^{2k} modulo 3 et le reste de 7^{2k} modulo 8.
b.Vérifier que 1991 est une solution de (S) et montrer que l'entier $1991^{2008} - 1$ est divisible par 24.

Exercice 9: *(contrôle 2009)*

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) :3x + 4y = - 8.
1.a.Vérifier que (0 , -2) est une solution de (E).
b.Résoudre (E)
2.Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$,on considère la droite Δ dont une équation est 3x + 4y + 8 = et on désigne par A le point de Δ d'abscisse 0.
a.Montrer que si M est un point de Δ à coordonnées entières alors AM est un multiple de 5.
b.Soit N un point de Δ de coordonnées (x , y) Vérifier que AN = $\frac{5}{4}|x|$.
c.En déduire que si AN est un multiple de 5 alors x et y sont des entiers.

* * * * * *

.