Classe : 3 T_1 Durée : 2 H Le 14 /4 /2011

DEVOIR DE CONTROLE N3

Exercice1 : (4 points)

Répondre par vrai ou faux

1)soit z = 2i – 3 on a $\bar{z}$ = 3 – 2i

2)soit z = - 1 - i on a $|z^8|$ = 16

3)soit z un nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{4}$, on a z^{12} = - 1

4)soit z un nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et d'argument $\frac{6\pi}{4}$ alors z est imaginaire pur

5)soit z un nombre complexe d'argument $\frac{-\pi}{6}$ et ayant une partie réelle égale à $4\sqrt{3}$ alors $|z|$ = 8

6)soit z un nombre complexe , on a $|z+1-i| = |\bar{z}+1+i|$

7) z et z' étant deux nombres complexes si $|z| = |z'|$ alors z = z'

8)z et z' étant deux nombres complexes on a toujours $|z+z'| = |z| + |z'|$

Exercice 2 : (5.5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct

Soit les points A , B et C d'affixes respectives - i , $\sqrt{3}$ + i et - $\sqrt{3}$ + i

1)Placer les points A , B et C sur la figure

2)a)Déterminer les affixes du point I milieu de [BC] et du point D tel que ACDB soit un parallélogramme

b)Montrer que ACDB est un losange

3)a)Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes - i , $\sqrt{3}$ + i et - $\sqrt{3}$ + i

b)Déterminer une mesure de $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$

Exercice 3 : (3.5 points)

Soit $f(x) = -2 \sin(2\pi x)$, $x \in IR$

1)Justifier qu'on peut étudier f sur $[0, \frac{1}{2}]$

2)Dresser le tableau de variation de f sur $[0, \frac{1}{2}]$

3)Représenter f sur $[\frac{-3}{2}, \frac{3}{2}]$ dans un repère orthonormé

4)a)Montrer que la droite $D : x = \frac{1}{4}$ est un axe de symétrie pour C_f

b)Montrer que le point $A(\frac{1}{2}, 0)$ est un centre de symétrie pour C_f

Exercice 4 : (7 points)

Soit les fonctions f et g définies par $f(x) = \frac{x^3+x^2+2x+1}{x^2+1}$ et $g(x) = x^4 + x^2 + 2$

On note C_f et C_g les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé

1)a)Etudier les variations de g

b)Calculer $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus

c) tracer sa courbe C_g dans un repère orthonormé

2)a)Préciser le domaine de définition de f

b)Montrer que la droite $D : y = x + 1$ est une asymptote à C_f et préciser la position de C_f par rapport à D

c)montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{(x^2+1)^2}$ et dresser le tableau de variation de f

d)Tracer C_f

e)Montrer que $f''(x) = \frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}$ et déterminer les points d'inflexion de C_f

3)Tracer dans le même repère la courbe de h où $h(x) = |f(x)|$

Correction :

Exercice1 :

1)Faux ($\bar{z}$ = -2i - 3)

2)Vrai ($|z|$= $\sqrt{2}$ donc $|z^8|$ = $|z|^8$ =16)

3)Vrai (z^{12} = [1 ,12 $\frac{\pi}{4}$] = [1 , 3π] =- 1)

4)Vrai (z = [$\sqrt{2}$, $\frac{3\pi}{2}$] = - $\sqrt{2}$ i)

5)Vrai (on sait que x = r cosθ et $4\sqrt{3} = 8\,\frac{\sqrt{3}}{2}$)

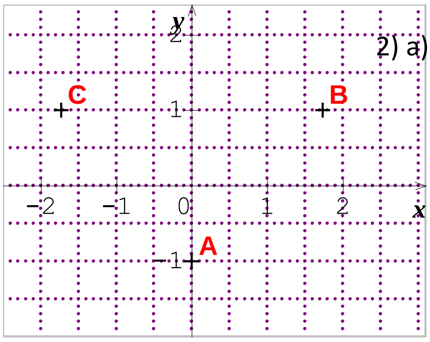
6)Vrai ($|z+1-i|$ = | $\overline{z+1-i}$| =$|\bar{z}+\overline{1-i}|$ = $|\bar{z}+1+i|$)

7)Faux (par exemple $|1|$= $|i|$ mais 1 $\neq$i)

8)Faux (par exemple $|1+i| \;\neq\; |1|+\;|i|$)

Exercice 2 :

1)



2) a)aff(I) =i , aff(D) = 3i

b)ACDB est un parallélogramme et AC = AB = $\sqrt{7}$ donc ACDB est un losange

3) a)-i = 1(cos($\frac{-\pi}{2}$) + i sin ($\frac{-\pi}{2}$))

$\sqrt{3}$ + I = 2(cos ($\frac{\pi}{6}$) + I sin ($\frac{\pi}{6}$))

- $\sqrt{3}$ + I = 2(cos ($\frac{5\pi}{6}$) + I sin ($\frac{5\pi}{6}$))

b)(OB ,OC) =arg($\frac{z_C}{z_B}$) = arg(zc)- arg(zB) = $\frac{2\pi}{3}$ + 2kπ

Exercice 3

1)fest impaire et périodique de période1 donc on peut étudier f sur [0,$\frac{1}{2}$]

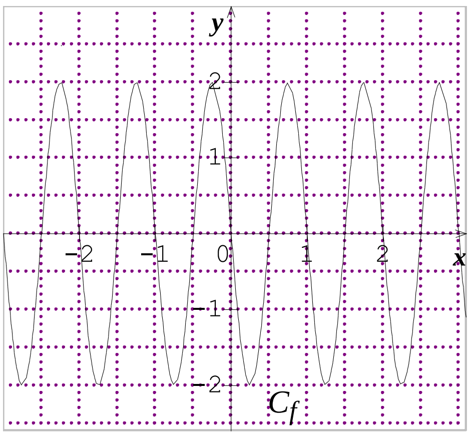
2)f'(x) = -4πcos $2\pi x$)

f'(x)= 0 eq $2\pi x = \frac{\pi}{2}$ +kπ eq x = $\frac{1}{4} + \frac{k}{2}$

dans [0,$\frac{1}{2}$] , x = $\frac{1}{4}$ d'où

x	0	¼	½
f'(x)	-	0	+
f(x)	0	-2	0

3)



4)a)pour tout x ∈IR , 2(1/4)- x ∈ IR et f(2(1/4) –x)= -2 sin($\pi - 2\pi x) = -2\sin(2\pi x)$ = f(x)

b) pour tout x ∈IR , 2(1/2)- x ∈ IR et f(2(1/2) –x)+f(x) = -2 sin($2\pi - 2\pi x) - 2sin2\pi x = 2\sin(2\pi x) - 2\sin(2\pi x) = 0$

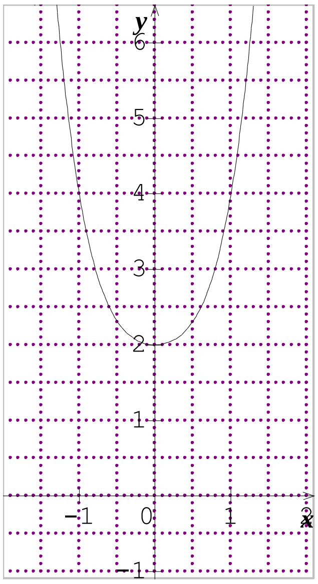
Exercice4 :

1)a)g'(x) = 4x3 +2x =x (4x2 +2)

x	-∞	0	+∞
g'(x)	-	0	+
g(x)	+∞ ↘	2	↗ +∞

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ = $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4}{x}$ = $\lim_{x\to-\infty} x$ = - ∞ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ = +∞

c)



donc Cg Admet deux branches paraboliques au voisinage

de - ∞ $et + \infty$ de direction l'axe des ordonnées

2)a)Df = IR

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x+1)$ = $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1}$ = $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2}$= $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}$ =0

Donc D: y = x + 1 est une asymptote à Cf

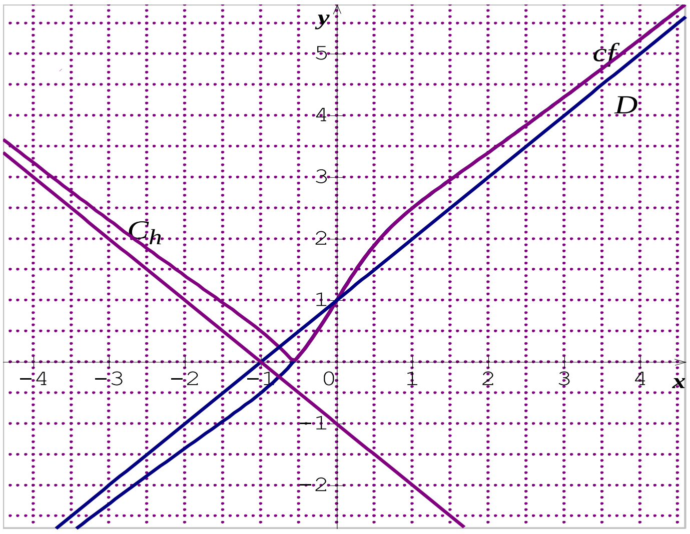
x	-∞	0	+∞
f(x) –(x+1)	-	0	+
Position de Cf et D	Cf au dessous de D		Cf au dessus de D

Cf et D se rencontrent

c)

x	-∞	+∞
f'(x)		
f(x)	$-\infty$ ↗	+∞

d)



e)f ''(x) = $\frac{(4x^3+2x)(x^2+1)^2-4x(x^2+1)(x^4+x^2+1)}{(x^2+1)^4} = \frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}$

f''(x) = 0 eq x = 0 ou x = $\sqrt{3}$ ou x = - $\sqrt{3}$