A/- Soit g :fonction définie sur]0,+∞[par g (x)= $Lnx + x - \frac{2}{x}$

1/- calculer $\lim_{0+} g$ et $\lim_{+\infty} g$.

2/-Montrer que g est dérivable sur]0,+∞[puis calculer g’(x) .

3/- Dresser le tableau de variations de g .

4/-Montrer que g réalise une bijection de]0,+∞[sur un intervalle I que l’on précisera .

5/-a- En déduire que g(x)=0 admet une unique solution α sur]0,+∞[.

b- Vérifier que α∈ [1,2].

c- En déduire un encadrement de α d’amplitude 0.1 .

6/- Déduire alors le signe de g .

B/- soit f : la fonction définie sur]0,+∞[par f(x)=$\frac{Lnx-x}{\sqrt{x+1}}$

1/- calculer $\lim_{0+} f$ et $\lim_{+\infty} f$.

2/- Etudier les variations de f.

3/-a- Vérifier que f(α) =$\frac{2-2\alpha^2}{\alpha\sqrt{\alpha+1}}$.

b-En déduire un encadrement de f(α).

4/- Tracer C :la courbe représentative de f dans un repère orthonormé direct .

C/- Le but de cette partie est l’étude de la convergence de la suite réelle S définie par :

$Sn = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$ pour tout n >0 .

1/- soit ϕ définie sur $[\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$ *par* ϕ(x)= sin x .

Montrer que ϕ est une bijection de $[\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$ sur un intervalle J que l’on précisera .

2/- soit ϕ^{-1} la réciproque de ϕ . Démontrer que ϕ^{-1} est dérivable sur]-1,1[

Et que $(\phi^{-1})'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3/- On pose h(x)=$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour x appartenant à [0,1[

Montrer que $Sn = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h(\frac{k}{n})$ ∀ n >0 .

4/- En utilisant la croissance de h sur [0,1[(et sachant qu’elle est intégrable au voisinage de 1)

Démontrer que

$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} h(x)dx \leq \frac{1}{n}\mathrm{h}(\frac{k}{n}) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} h(x)dx$.

5/- En déduire alors que :

$$\int_{0}^{\frac{n-1}{n}} h(x)dx \quad \leq \quad Sn \quad \leq \quad \int_{\frac{1}{n}}^{1} h(x)dx \quad .$$

6/- En s'inspirant des résultats précédents :

Déterminer $\lim_{n\to+\infty} Sn$.

Problème crée par : Khalil Waghlani

(la partie C est extraite d'un autre problème avec des remaniements.)

Bonne chance.