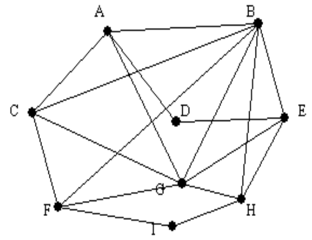
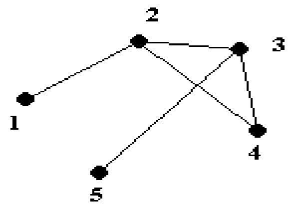
Exercice N°0



1) On considère le graphe G
   a) Déterminer Le degré de chacun des sommets du graphe suivant :

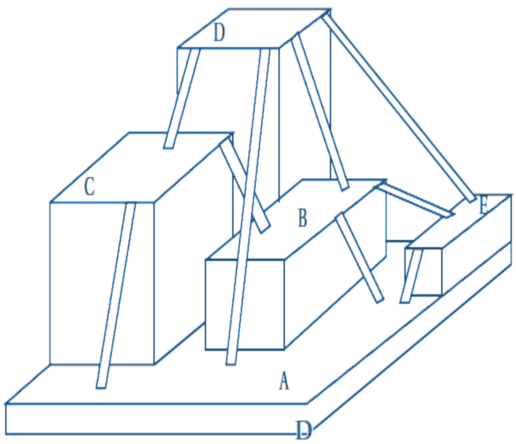
Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Degré									

   b) G est elle chaine eulérienne ?
   c) G est elle cycle eulérienne ?
   d) Déterminer le nombre chromatique.
2) Ecrivez la matrice M associée à ce graphe G' :



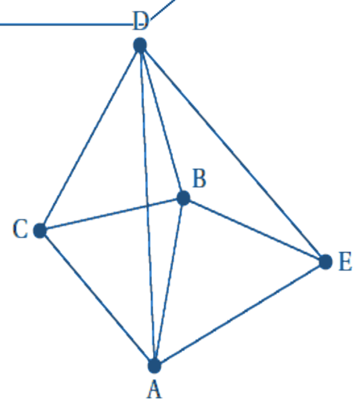
Exercice N°1

On considère un espace de jeu réservé à des enfants. Les enfants peuvent se déplacer sur cinq plates-formes notées A, B, C, D et E. Ces plates-formes sont reliées entre elles par un certain nombre de rampes, comme indiqué sur le schéma ci-dessous: On représente cet espace de jeu par le graphe G ci-dessous : Une plate-forme est représentée par un sommet et une rampe est représentée par une arête.



Partie A

1) Donner un sous-graphe complet d'ordre 4 du graphe G.
2) En déduire un encadrement du nombre chromatique du graphe G, Justifier la réponse.
3) Proposer une coloration du graphe G en expliquant la méthode utilisée.
4) En déduire la valeur du nombre chromatique du graphe G.



Partie B

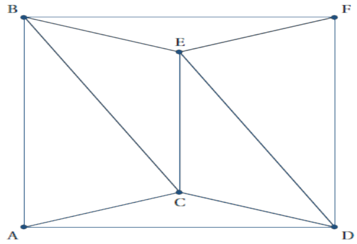
1) Ce graphe est-il connexe? Est-il complet? Justifier les réponses.
2) Ce graphe contient-il une chaine eulérienne? Justifier la réponse.
3) Si on rajoute une arête à ce graphe, quels sommets peut-on alors relier pour que le graphe obtenu contienne un cycle eulérien ? Justifier la réponse.

Partie C

On décide de peindre les surfaces des cinq plates-formes en attribuant des couleurs différentes à deux plates-formes reliées par une rampe.

1) Quel est le nombre minimum de couleurs nécessaire ? Justifier la réponse.
2) On propose aux enfants le jeu suivant : il s'agit de partir de la plateforme C et de rejoindre la plateforme E en utilisant toutes les rampes, et sans passer deux fois par la même rampe.

Exercice N°2



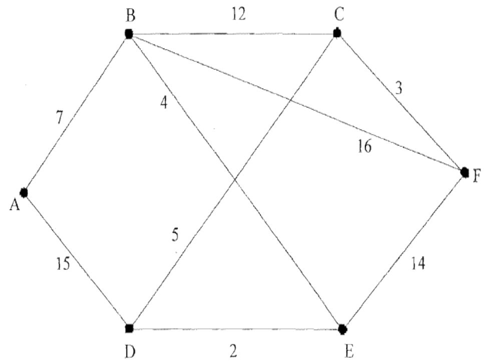
On considère le graphe G suivant :

1) Le graphe G est-il connexe ? Expliquer la réponse.
2) Le graphe G admet-il des chaînes eulériennes? Si oui, préciser.
3) Justifier la non-existence d'un cycle eulérien pour le graphe G. Quelle arête peut-on alors ajouter à ce graphe pour obtenir un graphe contenant un cycle eulérien.
4) Déterminer le nombre chromatique du graphe G.
5) Déterminer la matrice M associée à ce graphe (les sommets sont pris dans l'ordre alphabétique).
6) On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 8 & 10 & 6 & 5 \\ 10 & 6 & 11 & 6 & 11 & 10 \\ 8 & 11 & 8 & 11 & 11 & 6 \\ 10 & 6 & 11 & 6 & 11 & 10 \\ 6 & 11 & 11 & 11 & 8 & 8 \\ 5 & 10 & 6 & 10 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ Déterminer le nombre de chaînes de longueur 3 partant du sommet A et aboutissant au sommet F. Citer alors toutes ces chaînes.

Exercice N°3

Une agence de voyages organise différentes excursions dans une région du monde et propose la visite de sites incontournables, nommés A, B, C, D, E et F.

Ces excursions sont résumées sur le graphe ci-dessous dont les sommets désignent les sites, les arêtes représentent les routes pouvant être empruntées pour relier deux sites et le poids des arêtes désigne le temps de transport (en heures) entre chaque site.



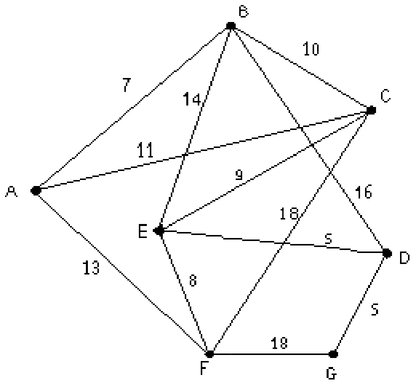
1) Justifier que ce graphe est connexe.
2) Un touriste désire aller du site A au site F en limitant au maximum les temps de transport.
a) En utilisant un algorithme, déterminer la plus courte chaîne reliant le sommet A au sommet F.
b) Déduire le temps de transport minimal pour aller du site A au site F.
3) Un touriste désirant apprécier un maximum de paysages souhaite suivre un parcours empruntant toutes les routes proposées une et une seule fois.

Si ce parcours existe, le décrire sans justifier; dans le cas contraire justifier qu'un tel parcours n'existe pas.

Exercice N°4

Une grande ville a Tunis a mis en place un système de location de bicyclettes en libre service. Un abonné peut ainsi louer une bicyclette dans une station puis la déposer dans n'importe quelle station de son choix. La ville compte sept stations de location nommées A, B, C, D, E, F et G.

Les stations sont reliées entre elles par une piste cyclable et les temps de parcours en minutes sont indiqués sur le graphe ci-dessous.



1) Yassine , cycliste très prudent, décide de visiter cette ville en n'empruntant que des pistes cyclables.

a) A-t-il la possibilité d'effectuer un parcours empruntant une fois et une seule toutes les pistes cyclables ? Justifier la réponse.

b) A la fin de ce parcours, pourra-t-il rendre sa bicyclette dans la station de départ ? Justifier la réponse.

2) On appelle M la matrice associée à ce graphe. On donne deux matrices N et T :

a) Une des deux matrices M ou T est la matrice M^3. Sans calculs, indiquer quelle est la matrice M^3 en justifiant la réponse.

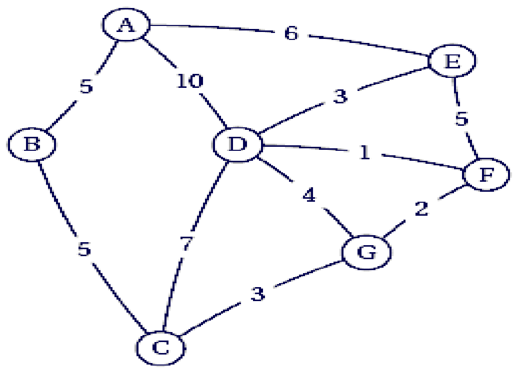
b) Yassine a loué une bicyclette à la station F et l'a rendue à la station E. Au cours de son déplacement, il est passé exactement deux fois devant une station. Combien de trajets différents a-t-il pu suivre ? Expliquer.

3) Le lendemain, il envisage de rejoindre le plus rapidement possible la station G en partant de la station A. A l'aide d'un algorithme, déterminer un tel parcours et donner alors le temps nécessaire pour l'effectuer.

EXERCICE 5 -

Partie A

Amine s'occupe de distribuer le courrier dans les bureaux d'une grande entreprise.
Le graphe ci-dessous représente les différents parcours qu'il peut faire pour distribuer le courrier dans les bureaux A, B, C, D, E, F et G.
Le poids de chaque arête indique le nombre d'obstacles (portes, escaliers, machines à café...) qui nuisent à la distribution du courrier.
Amine se voit confier par le bureau A un colis à livrer au bureau G.
Indiquer un parcours qui permette à Amine de partir du bureau A pour arriver au bureau G en rencontrant le minimum d'obstacles.



Partie B

Pris par le temps, il n'est pas rare de voir Laurent oublier de livrer le courrier du matin ! On considère que :

- ► Si Amine a distribué le courrier du matin un certain jour, la probabilité qu'il y pense le lendemain est de 0.7 .
- ► Si Amine a oublié de distribuer le courrier du matin un certain jour, la probabilité pour qu'il oublie à nouveau le lendemain est de 0.8 .

Le lundi matin 1^er^ octobre, Laurent a bien distribué le courrier.

On note a_n la probabilité que Laurent distribue le courrier le n-ième jour de travail (on considère donc que le lundi 1er octobre est le premier jour et que $a_1 = 1$).

1. Traduire les données de cet exercice à l'aide d'un graphe probabiliste. Préciser la matrice de transition associée à ce graphe.

2. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, on a : $a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{5}$.

3. On considère la suite U_n définie, pour tout $n \geq 1$, par suite $U_n = a_n - \frac{2}{5}$.

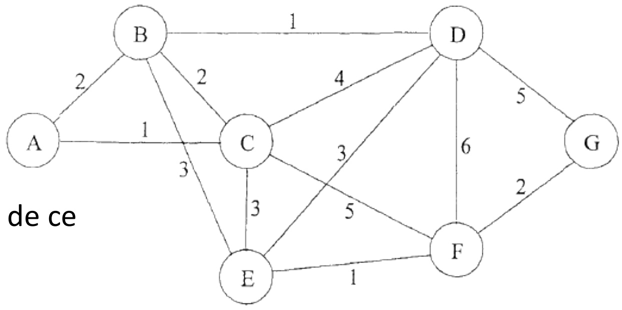
a) Démontrer que la suite U_n est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ On précisera le premier terme.

b) En déduire, pour tout $n \geq 1$, la valeur de a_n en fonction de n .

EXERCICE 6 -

Le graphe ci-dessous représente le plan d'une ville. Le sommet A désigne l'emplacement des services techniques. Les sommets B, C, D, E, F et G désignent les emplacements de jardins publics. Une arête représente l'avenue reliant deux emplacements et est pondérée par le nombre de feux tricolores situés sur le trajet.

Partie I :



1. a) Ce graphe est-il connexe ?

ce graphe est-il complet ?

c) Ce graphe admet-il une chaîne eulérienne ?

d) Ce graphe admet-il un cycle eulérien ?

2) Déterminer, en justifiant, le nombre chromatique de ce graphe.

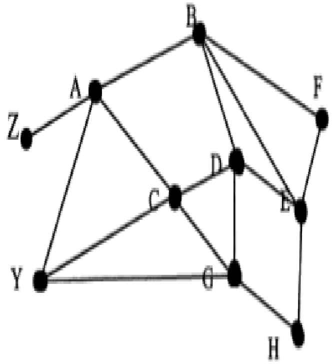
Partie II :

Proposer un trajet comportant un minimum de feux tricolores reliant A à G.

La réponse sera justifiée par un algorithme

Exercice 7

On considère le graphe ci-dessus.



1. a) Ce graphe est-il connexe ?

b) Déterminer le degré de chacun des sommets.

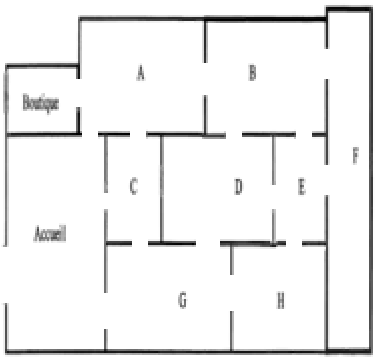
On pourra donner le résultat sous forme de tableau.

c) Justifier l'existence d'une chaîne eulérienne.

2) a) Déterminer un encadrement du nombre chromatique de ce graphe.

b) Montrer que ce nombre chromatique est égal à 3

3) Voici le plan d'un musée : les parties grisées matérialisent les portes et les visiteurs partent de l'accueil, visitent le musée et doivent terminer leur visite à la boutique.



a) Représenter la situation à l'aide d'un graphe en précisant ce que représentent arêtes et sommets.

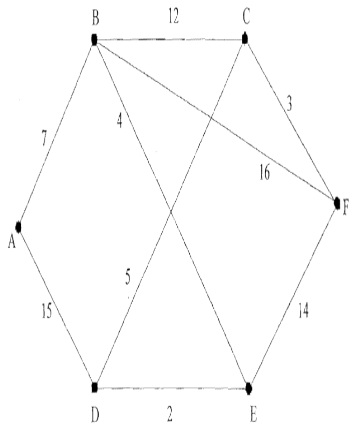
b) Pourquoi est-il possible de trouver un circuit où les visiteurs passent une fois et une seule par toutes les portes ?

c) Donner un exemple d'un tel circuit.

4) Comment colorier les salles y compris l'accueil et la boutique, en utilisant un minimum de couleurs, pour que 2 salles qui communiquent par une porte aient des couleurs différentes ?

EXERCICE 8 -

Une agence de voyages organise différentes excursions dans une région du monde et propose la visite de sites incontournables, nommés A, B, C, D, E et F. Ces excursions sont résumées sur le graphe ci-dessous dont les sommets désignent les sites, les arêtes représentent les routes pouvant être empruntées pour relier deux sites et le poids des arêtes désigne le temps de transport (en heures) entre chaque site.



1) Justifier que ce graphe est connexe.

2) Un touriste désire aller du site A au site F en limitant au maximum les temps de transport.

3) a) En utilisant un algorithme, déterminer la plus courte chaîne reliant le sommet A au sommet F.

b) Déduire le temps de transport minimal pour aller du site A au site F.

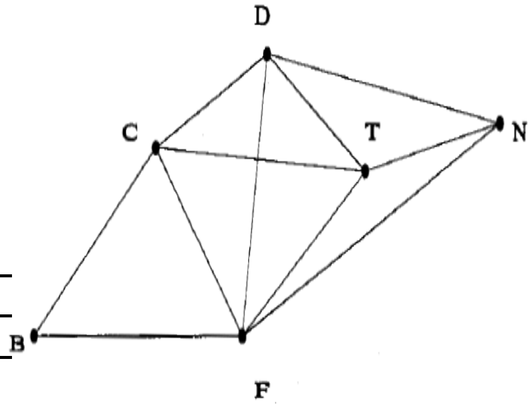
Un touriste désirant apprécier un maximum de paysages souhaite suivre un parcours empruntant toutes les routes proposées une et une seule fois.

Si ce parcours existe, le décrire sans justifier; dans le cas contraire justifier qu'un tel parcours n'existe pas.

EXERCICE 9

Un groupe d'amis organise une randonnée dans les Alpes.

On a représenté par le graphe ci-dessous les sommets B, C, D, F, T, N par lesquels ils peuvent choisir de passer. Une arête entre deux sommets coïncide avec l'existence d'un chemin entre les deux sommets.



1. a) Recopier et compléter le tableau suivant :

Sommets	B	C	D	F	N	T
Degré des sommets						

b) Justifier que le graphe est connexe.

2. Le groupe souhaite passer par les six sommets en passant une fois et une seule par chaque chemin.

Démontrer que leur souhait est réalisable. Donner un exemple de trajet possible.

3. Le groupe souhaite associer chaque sommet à une couleur de sorte que les sommets reliés par un chemin n'ont pas la même couleur. On note n le nombre chromatique du graphe.

a) Montrer que $4 \leq n \leq 6$.

b) Proposer un coloriage du graphe permettant de déterminer son nombre chromatique.

4. Le groupe se trouve au sommet B et souhaite se rendre au sommet N. Les distances en kilomètres entre chaque sommet ont été ajoutées sur le graphe.

EXERCICE 10 Bac 2010 p

On considère le graphe G de sommets A ,B,C et D dont la matrice associée est

$$M\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Justifier que G est un graphe orienté .
2) a) Recopier et compléter le tableau suivant d+ et d- représentent le nombre d'arêtes sortants et le nombre d'arrêtes entrants.

	A	B	C	D
d^+				
d^-				

b) Ce graphe G admet –il un cycle oriente eulérienne ?

c) justifier que G est une chaine orientée eulérienne ?

d) Représente le graphe G et donner un exemple de chaine orientée eulérienne .

3) On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 01 \end{pmatrix}$

a) Combien de chaines orientes de longueur 3 reliant –elles le sommet B au sommet C ?

b) Donner toutes les chaines orientes de longueur 3 reliant B à C .