PRODUIT SCALAIRE DANS E YOUSSEFBOULILA

I) Généralités: Une unité de longueur est fixée dans tout ce cours, le cm. par exemple

1) Définition:

On retiendra: On appelle produit scalaire des deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ de E ,

le réel noté: $\vec{AB}.\vec{AC}$

défini par: $\begin{cases} \text{Si } \vec{AB}=\vec{0} \text{ ou } \vec{AC}=\vec{0} \text{ Alors } \vec{AB}.\vec{AC}=0 \\ \text{Si non } \vec{AB}.\vec{AC}=AB\times AC\times\cos\left(\vec{AB},\vec{AC}\right) \end{cases}$

Remarque: L'angle $\left(\vec{AB},\vec{AC}\right)$, n'est pas orienté, sa mesure en radian est un réel de l'intervalle: $[0;\pi]$

2) Vocabulaire, notation: a) Pour tout vecteur $\vec{u}=\vec{XY}$ de E , on note: $\|\vec{u}\|$ la longueur XY

$\|\vec{u}\|$ s'appelle la norme du vecteur $\vec{u}$

b) Pour signifier que l'on a défini un produit scalaire dans E , on dit que E est l'espace euclidien de dimension 3

On retiendra:

$\vec{u}=\vec{XY}$; $\|\vec{u}\|=XY$

$\vec{u}^{\,2}=\vec{u}.\vec{u}=\vec{XY}.\vec{XY}=XY\times XY\times \qquad = \qquad = \qquad =$

$\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$

$\|k.\vec{u}\|=$

II) Propriétés du produit scalaire:

1) Commutativité: Pour tous vecteurs: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E , $\vec{u}.\vec{v}=$

2)a) Pour tout réel k et tout vecteur $\vec{u}$ de E , $\vec{u}.(k\vec{v})= \qquad =$

b) Pour tous réels α et β et tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E , $(\alpha\vec{u}).(\beta\vec{v})=$

3) Distributivité du produit scalaire par rapport à l'addition des vecteurs:

a) Pour tous vecteurs: $\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de E , $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=$ (Admis)

b) Pour tous réels: α ; β ; α' et β' , et tous vecteurs: $\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ de E ,
$(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}).(\alpha'\vec{u}'+\beta'\vec{v}')=$

c) En particulier: $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=$; $(\vec{u}+\vec{v})^2=$; $(\vec{u}-\vec{v})^2=$

4) Orthogonalité et produit scalaire:

a) Définition: Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E sont orthogonaux lorsque: $\begin{cases} \vec{u}=\vec{0} \text{ ou } \vec{v}=\vec{0} \\ \text{ou} \\ \vec{u}\neq\vec{0} \text{ et } \vec{v}\neq\vec{0} \text{ et } (\vec{u},\vec{v})=\frac{\pi}{2} \end{cases}$

b) Propriété: **i)** Si $\vec{u}\perp\vec{v}$ Alors: $\vec{u}.\vec{v}=$

ii) Si $\vec{u}.\vec{v}=0$ Alors: *) Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ Alors: $\vec{u}\perp\vec{v}$

*) Si $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$ Alors: $\cos(\vec{u},\vec{v})=$

Alors:

Alors:

On retiendra: Pour tous vecteurs: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E , $\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v}=0$

5) Théorèmes de Pythagore:

a) Théorème de Pythagore: Démontrer que: $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2 \Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$

puis interpréter graphiquement

b) Théorème de Pythagore généralisé:

A ; B et C sont trois points de E , on pose: BC = a ; CA = b et AB = c

i) Ecrire sous deux formes différentes: $\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)^2$ (on utilisera les lettres: a ; b et c)

ii) Exprimer $\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC}\right)$ en fonction de $\cos(B\hat{A}C)$

iii) Déduire de **i)** et **ii)** l'expression de a^2 en fonction de: b ; c et $\cos(B\hat{A}C)$

6) Exercices: 1) Donner la définition de: $S_{\Omega,r}$, la sphère de centre Ω et de rayon r $(r \in [0;+\infty[)$

2) $[AB]$ est un diamètre de $S_{\Omega,r}$

a) Démontrer que: Pour tout point M de E : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=M\Omega^2-r^2$

b)i) Déduire de a) que: $M \in S_{\Omega,r} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{MB}$

ii) Enoncer le résultat analogue dans le plan P

3) S et S ' sont deux sphères de même centre Ω , δ et δ' sont deux demi-droites perpendiculaires, d'origine Ω , δ coupe S en A et S ' en A' ,
δ' coupe S en B et S ' en B' , I est le milieu du segment $[AB]$
Démontrer que: $(\Omega I)\perp(A'B)$

7) Projection orthogonale d'un vecteur sur un autre: $\vec{u}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$ sont deux vecteurs de E

a) Définition: $\vec{u}$' est le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{u}$' et $\vec{v}$ sont colinéaires et $(\vec{u}-\vec{u}')\perp\vec{v}$

b) Remarque: $\vec{u}.\vec{v}=((\vec{u}-\vec{u}')+\vec{u}').\vec{v}=$

III) Produit scalaire dans l'espace euclidien E muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

1) Expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

a) $\vec{u}(x;y;z)$; $\vec{u}'(x';y';z')$; $\vec{u}$ = ; $\vec{u}'$ =
$\vec{u}.\vec{u}'$ = =

On retiendra: Dans un repère orthonormé de E , Si $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{u}'(x';y';z')$
Alors: $\vec{u}.\vec{u}'$ = Donc $\vec{u}.\vec{u}$ =
Donc: $\|\vec{u}\|$ =

b) Exercice: En utilisant **II)7)** , déterminer $\vec{u}'$, le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$
i) $\vec{u}(2;1;1)$; $\vec{v}(3;0;-1)$ **ii)** $\vec{u}(2;1;1)$; $\vec{v}(3;1;-1)$
Puis vérifier par calculs que: $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}'.\vec{v}$

2) Angle formé dans E par deux vecteurs non nuls . Angle aigu formé dans E par deux droites sécantes:

a) Angle $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$: $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v})$ donc: $\cos(\vec{u},\vec{v})$ =

b) Angle aigu (d;d') : d = $(A,\vec{u})$ est une droite qui passe par A et dont $\vec{u}$ est un vecteur directeur
d' = $(A,\vec{u}')$ est une droite qui passe par A et dont $\vec{u}'$ est un vecteur directeur

Le cosinus de l'angle aigu formé par les droites d et d' est cos (d;d') =
donc cos (d;d') =

On retiendra: $(\vec{u},\vec{v})$ = ________ ; (d;d') = ________

c) Exercices: 1) Déterminer la valeur exacte ou approchée à 10^{-3} radian près de la mesure de l'angle $(\vec{u},\vec{v})$
i) $\vec{u}(1;1;0)$; $\vec{v}(1;1;\sqrt{2})$ ii) $\vec{u}(1;0;-2)$; $\vec{v}(2;1;4)$

2) On considère les points: A(-1;1;3) ; B(0;1;1) et C(1;2;7)
Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} radian près de la mesure de l'angle aigu formé par
les droites: (AB) et (AC)

3) Distance entre deux points $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$:

On retiendra: $A(x_A;y_A;z_A)$; $B(x_B;y_B;z_B)$; $\vec{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$; $AB = \|\vec{AB}\|$ =

4) Equation cartésienne d'une sphère de E :

a) Déterminer une équation cartésienne de la sphère de centre $\Omega(\alpha;\beta;\gamma)$ et de rayon r ($r \in [0;+\infty[$)

b) Déterminer une équation cartésienne de la sphère de diamètre [AB] (avec: $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$)

c) Remarques:
i) Quelle condition et quel nombre de points faut-il pour définir l'unique sphère passant par ces points ?
ii) A ; B ; C , sont des points tels que: $(AC)\perp(BC)$. S est une spère qui passe par les points:
A ; B et C , son centre est appellé: Ω . C appartient à un cercle C que l'on décrira.

C est un cercle de S , donc Ω est un point de

On retiendra: M est un point de la sphère de centre $\Omega(\alpha;\beta;\gamma)$ et de rayon r $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

M est un point de la sphère de diamètre $[AB]$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

Il passe une et une seule sphère par quatre points

Toute sphère a une équation cartésienne du type:

d) Exercices: 1) $A(-1;2;3)$; $B(2;-1;5)$

Déterminer une équation cartésienne de la sphère de diamètre $[AB]$

2) Γ est l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que: $x^2+y^2+z^2-2x+4y+z=m$

Déterminer, suivant la valeur du paramètre réel m , la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble Γ

3) Déterminer les centres des sphères de rayon 3 , qui passent par les points: $A(-1;0;1)$; $B(3;1;3)$ et $C(2;-3;4)$

4)a) Déterminer le centre, puis le rayon de la sphère S qui passe par les points: $A(1;1;0)$; $B(1;-1;1)$; $C(0;1;-2)$ et $D(1;0;-1)$

b) Sans utiliser 3)a) , montrer qu'une équation cartésienne de la sphère S est: $3x^2+3y^2+3z^2+11x+y-z-18 = 0$

5) Equation cartésienne d'un plan de E :

a) Ensemble Π des points $M(x;y;z)$ de E tels que $\vec{AM} \perp \vec{n}$:

$A(x_A;y_A;z_A)$ est un point de E , et $\vec{n}(a;b;c)$ est un vecteur non nul de E

i) Géométriquement, Π est le plan passant par A et perpendiculaire à la direction du vecteur $\vec{n}$

ii) Analytiquement, Π est l'ensemble des points $M(x;y;z)$ de E tels que :

donc une équation cartésienne de Π est du type:

b) Ensemble Π des points $M(x;y;z)$ de E tels que: $ax+by+cz+d=0$; $(a;b;c)\neq(0;0;0)$:

Soit: $A(x_A;y_A;z_A)$, un point de E , qui vérifie la relation: $ax+by+cz+d=0$ donc: $d =$

$M(x;y;z) \in \Pi \Leftrightarrow ax+by+cz- ax_A-by_A-cz_A = 0 \Leftrightarrow a(\quad)+b(\quad)+c(\quad) =$

Soit: $\vec{n}$ le vecteur de E de coordonnées: $(a;b;c)$, $\vec{n}$ est un vecteur non nul de E et,

$M(x;y;z) \in \Pi \Leftrightarrow \vec{AM}.\vec{n} = \qquad \Leftrightarrow \vec{AM} \quad \vec{n}$

On retiendra: $ax+by+cz+d= 0$ $(a;b;c)\neq(0;0;0)$, est une équation cartésienne d'un plan de E perpendiculaire à la direction du vecteur $\vec{n}(a;b;c)$

c) Remarques:

i) Dans toute la suite, l'écriture: $ax+by+cz+d= 0$, supposera toujours: $(a;b;c)\neq(0;0;0)$

ii) $\vec{n}$, un vecteur non nul de E , est perpendiculaire (ou normal) à un plan P de E $\Leftrightarrow \vec{n}$ est perpendiculaire à

d) Exercices: 1) Déterminer une équation cartésienne du plan P qui passe par le point $A(-5;-2;1)$ et qui est perpendiculaire à la direction du vecteur $\vec{n}(-1;-2;1)$. Vérification ?

2) On considère les points $A(1;0;1)$; $B(0;0;1)$ et $C(1;2;-1)$

a) Les points: A ; B et C sont-ils alignés ?
b) Déterminer un vecteur non nul et normal au plan (ABC)
c) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) . Vérification ?

3) Mêmes question qu'au 2) avec: A(1;1;-1) ; B(2;0;1) et C(3;1;0)

4) Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble des points de E , qui sont équidistants des points: A(-1;3;-2) et B(0;1;-1) . Vocabulaire ?

5)a)i) Déterminer un systéme d'équations cartésiennes de l'ensemble des points de E , qui sont équidistants des points: A(-1;3;-2) ; B(0;1;-1) et C(-1;0;2)
ii) Déduire de: i) un système d'équations paramétriques de l'ensemble décrit au: i)
iii) Déduire de: ii) la nature et des éléments caractéristiques de l'ensemble décrit au: i)
b) Déterminer, en utilisant les déterminants, une équation cartésienne du plan (ABC)
c)i) Vérifier que la droite définie au: a) est perpendiculaire au plan (ABC)
ii) Pouvait-on prévoir géométriquement le résultat du: c)i) ?

<u>6) Plans parallèles:</u> P: ax+by+cz+d = 0 et P': a'x+b'y+c'z+d' = 0

<u>a)</u> Les plans: P et P' sont parallèles $\Leftrightarrow$ Les vecteurs $\vec{n}$(a;b;c) et $\vec{n}'$(a';b';c') sont

$\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{R}$ / $\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right.$

$\Leftrightarrow$

<u>b) Exercices:</u> 1) Déterminer une équation cartésienne du plan P' , parallèle au plan P et passant par le point A

i) P: x+y+z=0 ; A(1;-5;-2)   ii) P: -x-2y+3z-6=0 ; A(-1;-1;1)

2)a) Montrer que les plans: P: 2x-y+2z+3=0 et P': -3x+1,5y-3z=0 , sont parallèles.
b) Déterminer l'ensemble Π des points de E , équidistants des plans: P et P'
c)i) Déterminer la distance entre les plans P et P'
ii) Déduire de c)i) la distance entre les plans P et Π

3) Déterminer une équation cartésienne du plan Π équidistant des des plans: parallèles: P: ax+by+cz+d = 0 et P': ax+by+cz+d' = 0

<u>On retiendra:</u> $ax+by+cz+\dfrac{d+d'}{2} = 0$ est une équation du plan équidistant des des plans: parallèles: P: ax+by+cz+d= 0 et P': ax+by+cz+d'= 0

<u>7) Intersection dans E de deux plans non parallèles, droite dans E :</u>

<u>a)</u> Les plans: P: ax+by+cz+d= 0 et P': a'x+b'y+c'z+d'= 0 , ne sont pas parallèles
$\Leftrightarrow$ Les vecteurs $\vec{n}$(a;b;c) et $\vec{n}'$(a';b';c')
$\Leftrightarrow$

<u>b) Droite de E :</u>
i) L'intersection des deux plans non parallèles: P et P' , est une droite D de E

ii) Un point M(x;y;z) de E appartient à D $\Leftrightarrow$ (S) $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$

iii) (S) constitue un système d'équations cartésiennes de la droite D

iv) $\vec{u}(x;y;z)$ est un vecteur directeur de D $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \\ \vec{u} \\ \vec{u} \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} \\ \\ \end{cases}$

c) Position relative dans E d'une droite D = (A,$\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$) et d'un plan P: ax+by+cz+d = 0 :

On retiendra: D est parallèle à P $\Leftrightarrow \qquad \Leftrightarrow$
D n'est pas parallèle à P $\Leftrightarrow \qquad \Leftrightarrow$

d) Position relative dans E de deux droites D = (A,$\vec{u}$) et D' = (A',$\vec{u}$') :

On retiendra: **a)** D est parallèle à D' $\Leftrightarrow$
b) Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{u}$' ne sont pas colinéaires:
i) Si D et D' ont un point commun , Alors D et D' sont sécantes et coplanaires
ii) Si D et D' n'ont pas de point commun , Alors D et D' ne sont pas coplanaires

e) Exercices: 1) Déterminer un point et un vecteur directeur de la droite D (2 méthodes)

i) D: $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-z=0 \end{cases}$ ii) D: $\begin{cases} 2x-y+z-5=0 \\ -x+2y-5z+1=0 \end{cases}$

2) Déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite D
a) D passe par le point A(0,1;0) et $\vec{u}$(1;0;-1) est un vecteur directeur de D
b) D passe par le point A(-1,2;1) et $\vec{u}$(-2;-1;3) est un vecteur directeur de D

3) Démontrer que la droite d: $\begin{cases} 2x-y+z-3=0 \\ x+2z+1=0 \end{cases}$ et le plan P: x-z-1=0 sont sécants

Déterminer le point d'intersection de D et de P (2 méthodes)

4)a) Démontrer que la droite d: $\begin{cases} 2x-y+z-3=0 \\ x+2z+1=0 \end{cases}$ est parallèle au plan P: x-y-z-2=0

b) Déterminer la distance de d à P

5)a) Démontrer que la droite d: $\begin{cases} 2x-y+z-3=0 \\ x+2z+1=0 \end{cases}$ est parallèle au plan P: x-y-z-4=0

b) Déterminer la distance de d à P

6) Etudier la position relative des droites d et d' (diverses méthodes)

i) d: $\begin{cases} 2x-y+z-3=0 \\ x+2z+1=0 \end{cases}$ d': $\begin{cases} x-2y-5=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$

ii) d: $\begin{cases} 2x-y+z-3=0 \\ x+2z+1=0 \end{cases}$ d': $\begin{cases} x+2z-1=0 \\ y+3z=0 \end{cases}$

iii) d: $\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x \quad + 2z + 1 = 0 \end{cases}$ d': $\begin{cases} -x + z - 2 = 0 \\ y + 2 = 0 \end{cases}$

7)a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que: $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{4}$

b) Dans le cas où $\alpha\beta\gamma \neq 0$

i) Démontrer qu'un système d'équations cartésiennes de la droite

$d = (A(x_A;y_A;z_A),\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix})$ est: $\frac{x-x_A}{\alpha} = \frac{y-y_A}{\beta} = \frac{z-z_A}{\gamma}$

ii) Démontrer que: $\frac{x-x_A}{\alpha} = \frac{y-y_A}{\beta} = \frac{z-z_A}{\gamma}$

est un système d'équation cartésienne de la droite $d = (A(x_A;y_A;z_A),\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix})$

8) Angle aigu formé dans E par deux plans non parallèles:

a) Montrer géométriquement que l'angle aigu formé par deux plans, non parallèles P et P' , est égal à l'angle aigu formé par deux vecteurs normaux respectivement à: P et P'

On retiendra: P: ax+by+cz+d = 0 ; P': a'x+b'y+c'z+d' =0 , $\vec{n}(a;b;c)$ et $\vec{n}'(a';b';c')$

L'angle aigu formé par les plans P et P' a pour mesure: $\arccos(\frac{|\vec{n}.\vec{n}'|}{\|\vec{n}\| \times \|\vec{n}'\|})$

b) Exercice:

Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} radian près de l'angle aigu formé par les deux plans P et P'

i) P: x+y+z=0 ; P': -2x+y-z+1=0 ii) P: 2x+y+z=0 ; P': -x+y-z=0 iii) P: x+z=0 ; P':-2x-y+2z-1=0

9) Plans perpendiculaires: P: ax+by+cz+d = 0 et P': a'x+b'y+c'z+d' = 0

On retiendra: Les plans: P: ax+by+cz+d = 0 et P': a'x+b'y+c'z+d' = 0 sont perpendiculaires

$\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$

10) Angle aigu formé dans E par une droite $D = (A,\vec{u})$ et un plan P: ax+by+cz+d = 0 :

On suppose que la droite D n'est pas parallèle au plan P

a) Montrer géométriquement que l'angle aigu formé par la droite $(A;\vec{u})$ et le plan P , est égal au complémentaire de l'angle aigu formé par $\vec{u}$ et un vecteur normal à P

On retiendra: La droite $D = (A;\vec{u})$ n'est pas parallèle au plan P: ax+by+cz+d = 0

L'angle aigu formé par le plan P et la droite D à pour mesure: $\frac{\pi}{2} - \arccos(\frac{|\vec{u}.\vec{n}|}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{n}\|})$

b) Exercice: Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} radian près de l'angle aigu formé par

la droite d: $\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x \quad + 2z + 1 = 0 \end{cases}$, et le plan P: x-z-1=0

11) Distance dans E d'un point $A(x_A;y_A;z_A)$ au plan Π : $ax+by+cz+d = 0$:

a) $\vec{n}(a;b;c)$ est un vecteur non nul de E , normal au plan Π
Soit H le point d'intersection de la droite $(A;\vec{n})$ et du plan Π
Vocabulaire: H , est le sur Π
Soit $C(x_C;y_C;z_C)$ un point de Π , on a donc: d =

i) $\vec{AC}.\vec{n} = \left(\vec{AH}+\vec{HC}\right).\vec{n} = \vec{AH}.\vec{n} + \quad = AH\times\|\vec{n}\|\times \quad = AH\times\|\vec{n}\|\times(\quad)$

ii) $\vec{AC}.\vec{n} = (\quad)a+(\quad)b+(\quad)c =$

On retiendra: La distance du point: $A(x_A;y_A;z_A)$ de E au plan Π : $ax+by+cz+d= 0$; $(a;b;c)\neq(0;0;0)$ est: $d(A,\Pi) = \dfrac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

b)Remarque: (Cours de 5$^{\text{ième}}$) La distance du point: $A(x_A;y_A)$ de P à la droite d: $ax+by+c = 0$;

$(a;b)\neq(0;0)$, est: $d(A,d) =$

c) Exercices: 1)a) Déterminer la distance du point A(-1;2;-3) au plan Π: x+y-2z = 1
b) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point A sur le plan Π
c) Vérifier le résultat du 1)a)

2)a) Vérifier par calculs que les points M de la droite $d =(A(1;0;-3);\vec{u}(1;1;3))$, sont tous à la même distance du plan Π: -x-2y+z=4
b) Pouvait-on prévoir géométriquement le résultat du 2)a) ?

3)a) Retrouver les résultats de l'exercice **2)b)c)** du **III)6)** avec une nouvelle méthode
b) Etablir des équations des sphères de rayon 2 , tangentes à P dont les centres appartiennent à la droite qui passe par le point A(-2,4;0) et dont $\vec{u}(0;1;1)$ est un vecteur directeur

4) On considère le plan Π: 4x-y-z=1 et les points: A(1;4;5) et B(5;6;1)
a) Etablir un système d'équations paramétriques de l'ensemble des points de Π qui sont équidistants de A et B (différentes méthodes)
b) Etablir une équation des sphères de rayon $\sqrt{14}$, passant par les points A et B et dont le centre appartient au plan Π

12) Position relative dans E d'un plan P: $ax+by+cz+d = 0$ et d'une sphère $S_{\Omega,R}$:

a)i) Dessiner en perspective l'intersection d'un plan P et d'une sphère S de centre Ω , et de rayon R
ii) Soit I le centre et r le rayon, du cercle ainsi défini dans l'un des trois cas de dessin ci-dessus
Exprimer r en fonction de R et de ΩI

On retiendra:
Si $d(\Omega, P) > R$ Alors $S_{\Omega,R} \cap P =$
Si $d(\Omega, P) = R$ Alors $S_{\Omega,R}$ et P sont en et $S_{\Omega,R} \cap P =$
Si $d(\Omega, P) < R$ Alors $S_{\Omega,R} \cap P =$ Avec:

b) Exercices: 1) Déterminer les éléments caractéristiques de l'intersection du plan P et de la sphère $S_{\Omega,R}$

i) $\Omega(0;2;1)$; $R = 0,75$; P: $\sqrt{2}\,x+y+z=1$

ii) $\Omega(0;2;1)$; $R = 1$; P: $\sqrt{2}\,x+y+z=1$

iii) $\Omega(0;2;1)$; $R = 3$; P: $\sqrt{2}\,x+y+z=1$

2) Γ_m : $x^2+2x+y^2-2y+z^2+2z+m=0$

a)i) Déterminer les valeurs du paramètre réel m pour lesquelles Γ_m est une sphère

ii) Donner alors son centre et son rayon

b) Lorsque Γ_m est une sphère, déterminer, suivant les valeurs du paramètre réel m , les éléments caractéristiques de l'intersection du plan P: $x-y+2z= 0$ et de la sphère Γ_m

3) S est la sphère d'équation cartésienne: $x^2+y^2+z^2-2x+4y+4 = 0$

a) Déterminer une équation cartésienne du plan Π tangent à la sphère S au point: A(2;-2;0)

b) Déterminer une équation cartésienne de chacun des plans P et P' , qui sont tangents à la sphère S et qui sont parallèles au plan Π': $y = 0$

c) Q et Q' sont deux plans qui sont tangents à la sphère S respectivement en C et C' , qui passent par les points: A'(1;1;0) et B'(2;0;0)
Déterminer C et C' puis des équations cartésiennes de Q et Q'

4) Déterminer une équation cartésienne de chacun des plans perpendiculaires à la direction du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$, qui coupent la sphère d'équation: $x^2+y^2+z^2+2x-4z-\frac{15}{7} = 0$ suivant un cercle de rayon $\frac{6}{\sqrt{14}}$