EXERCICE I Soit f la fonction définie sur $]1\ ;+\infty[$ par $f(x)=x-\dfrac{1}{x\ln x}$ et on désigne par (C) sa courbe représent

dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ et en déduire une asymptote à (C).

2) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$. Démontrer que la droite (d) d'équation $y=x$ est une asymptote à (C) et étudier la position de (C) par rapport à (d).

3) Calculer $f'(x)$ et montrer que f est strictement croissante.
Dresser le tableau de variations de f.

4) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une racine unique α et vérifier que $1{,}5<\alpha<1{,}6$.

5) Tracer (d) et (C).

6) a- Calculer l'aire A(t) du domaine limité par la courbe (C), la droite (d) et les deux droites d'équations $x=e$ et $x=t$ où $t>e$.
b- Montrer que pour tout $t>e$, on a $A(t)<t$.

EXERCICE II

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=e^{2x}+x^2-2x$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a- Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.
b- Donner sous forme décimale f(1) et f(–1,5).

2) Le tableau ci-dessous est le tableau de variations de la fonction f ' dérivée de f.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

a- Déterminer, suivant les valeurs de x, le signe de $f'(x)$.
b- Dresser le tableau de variations de f.

3) Tracer la courbe (C).

4) Soit F la fonction définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.
a- Déterminer le sens de variations de F.

www.devoir@t.net © 2011

b- Quel est le signe de F(x) ? justifier la réponse.

EXERCICE III Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on donne les

points A et B tels que : $z_A = 1$ et $z_B = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Soit (C) le cercle de centre A et de rayon 1.

1) a- Ecrire $z_B - z_A$ sous forme exponentielle .

b-Déterminer une mesure de l'angle $(\vec{u};\overrightarrow{AB})$.

c- Montrer que le point B appartient au cercle (C).

2) A tout point M d'affixe z, non nul, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{\bar{z}+2}{\bar{z}}$.

a- Démontrer que $\bar{z}(z'-1) = 2$.

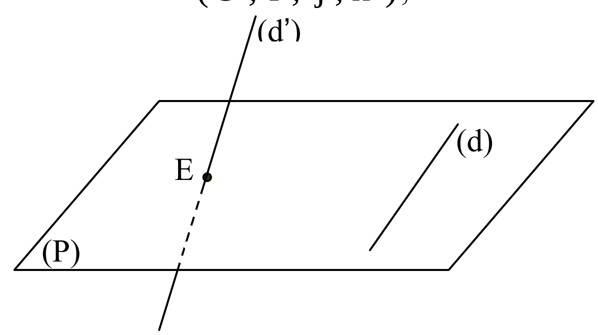
b-En déduire que, lorsque M' décrit le cercle (C), M décrit un cercle (T) à déterminer.

EXERCICE IV Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$,

on donne les droites (d) et (d') définies par :

$$(d) : \begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t \\ z = t-1 \end{cases} \quad \text{et} \quad (d') : \begin{cases} x = 2m \\ y = -m+1 \\ z = m+1 \end{cases}$$

(t et m sont deux paramètres réels).



1) Démontrer que (d) et (d') sont non coplanaires.

2) a- Montrer que x – y + z = 0 est une équation du plan (P) déterminé par O et (d).

b- Déterminer les coordonnées du point E intersection de (P) et (d').

c- Démontrer que la droite (OE) rencontre (d).

3) a- Calculer la distance du point O à la droite (d).

b- En déduire que le cercle ,du plan (P), de centre O et passant par E, est tangent à (d).

EXERCICE V

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x + 2\dfrac{\ln x}{x}$. (C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$; unité 2 cm .

1) a - Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et en donner une interprétation graphique.

b - Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et vérifier que la droite (d) d'équation $y = x$ est une asymptote à (C) .

c - Etudier, suivant les valeurs de x, la position relative de (C) et (d).

2) Le tableau ci-dessous est le tableau de variations de la fonction f ' dérivée de f.

x	0		e		$e\sqrt{e}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	$1-e^{-3}$	$\nearrow$	1

a - Montrer que f est strictement croissante sur son domaine de définition et dresser son tableau de variations .

b - Ecrire une équation de la tangente (D) à (C) au point G d'abscisse e.

c - Démontrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion L.

d - Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine unique α et vérifier que $0{,}75 < \alpha < 0{,}76$.

3) Tracer (D) , (d) et (C) .

4) Calculer, en cm^2, l'aire du domaine limité par la courbe (C), la droite (d) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

www.devoir@t.net © 2011