Exercices de Révision d' ANALYSE

EX I On considère la fonction: $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 6}{(x-1)^2}$

1)a) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

b)i) Donner une équation des asymptotes au graphe de f

ii) Etudier la position du graphe de f par rapport à son asymptote horizontale

c) Dresser le tableau de variation de f

2) Construire les asymptotes et le graphe de f

3)a) Déterminer les réels a ; b et c tels que: $\forall x \in \mathbf{R} - \{1\}$ $\quad f(x) = a + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{(x-1)^2}$

b) Déterminer l'aire du domaine limité par: le graphe de f , l'axe (Ox)

et les droites: $x = 2$ et $x = 3$

c)i) $k > 3$. Exprimer en fonction de k , $A(k)$, l'aire du domaine limité par:

le graphe de f , son asymptote horizontale et les droites: $x = 3$ et $x = k$

ii) Etudier la limite de $A(k)$ lorsque k tend vers $+\infty$

EXII On considère la fonction: $f(x) = e^{2x} - e^{x} + 1$

1)a) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

b)i) Donner une équation de l'asymptote au graphe de f

ii) Etudier la position du graphe de f par rapport à son asymptote

c) Dresser le tableau de variation de f

d) Déterminer les coordonnées du point d'inflexion du graphe de f

e) Déterminer une équation de T_0 la tangente au graphe de f au point d'abscisse $x = 0$

2) Construire l'asymptote, la tangente T_0 et le graphe de f

3)a) Déterminer l'aire du domaine limité par: le graphe de f , la tangente T_0

et la droite: $x = -1$

b)i) $k < 0$. Exprimer en fonction de k , $A(k)$, l'aire du domaine limité par:

le graphe de f , son asymptote et les droites: $x = k$ et $x = 0$

ii) Etudier la limite de $A(k)$ lorsque k tend vers $-\infty$

EXIII On considère la fonction: $f(x) = (3 - x)e^{-\frac{1}{3}x}$

1)a) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

b) Donner une équation de l'asymptote au graphe de f

c) Dresser le tableau de variation de f

d) Déterminer une équation de T_3 la tangente au graphe de f au point d'abscisse $x = 3$

2) Construire l'asymptote, la tangente T_3 et le graphe de f

3)a) $k > 3$. Exprimer en fonction de k , $A(k)$, l'aire du domaine limité par:

le graphe de f , son asymptote horizontale , et les droites: $x = 3$ et $x = k$

b) Etudier la limite de $A(k)$ lorsque k tend vers $+\infty$

EX IV On considère la fonction: $f(x) = 1 - 2\ln(-2x + 1)$

1)a) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

b) Donner une équation de l'asymptote au graphe de f

c) Dresser le tableau de variation de f

d) Déterminer une équation de T_0 la tangente au graphe de f au point d'abscisse $x = 0$

2) Construire l'asymptote, la tangente T_0 et le graphe de f

3)a) Déterminer l'aire du domaine limité par: le graphe de f , l'axe (Ox) et les droites: $x = -2$ et $x = -1$

b)i) $0 < k < 0{,}5$. Exprimer en fonction de k , $A(k)$, l'aire du domaine limité par:

le graphe de f , l'axe (Ox) et les droites: $x = 0$ et $x = k$

ii) Etudier la limite de $A(k)$ lorsque k tend vers $+\infty$

EX V On considère la fonction définie sur $[\,0\,;\,2\pi\,]$ par: $f: x \mapsto 1 + \cos x$

1) Construire le graphe de f dans un repère orthonormé

2)a) Vérifier que la fonction $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$ est une primitive de $\cos^2 x$

b) Soit S la surface limitée par le graphe de f et les axes de coordonnées

Calculer la mesure du volume du solide de révolution engendré par la rotation de S autour de l'axe des abscisses

EX VI 1)a) Déterminer le domaine de définition de la fonction: $f(x) = \dfrac{\cos^2 x}{\sin x}$

b)i) Démontrer que f est une fonction impaire et périodique de période 2π

ii) Démontrer que le graphe de f admet la droite d'équation: $x = \frac{\pi}{2}$, comme axe de symétrie

iii) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\left]\,0\,;\,\frac{\pi}{2}\,\right]$

iv) Construire le graphe de f sur $[\,-\pi\,;\,\pi\,]$

2)a) Déterminer les réels a ; b et c tels que: $\forall x \in \mathbf{R}\setminus\{-1\,;\,1\}$ $\dfrac{x^2}{x^2-1} = a + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x+1}$

b)i) Calculer l'aire du domaine D , limité par le graphe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations: $x = \frac{\pi}{4}$ et $x = \frac{\pi}{2}$

(On effectuera le changement de variable: $u = \cos t$, dans l'intégrale : $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\,dt$)

ii) Calculer la valeur moyenne de f sur $\left[\,\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{\pi}{2}\,\right]$

c) Calculer la mesure du volume du solide de révolution engendré par la rotation de D autour de l'axe des abscisses (On montrera que: $\frac{\cos^4 t}{\sin^2 t} = \frac{1}{\sin^2 t} - 2 + \sin^2 t$,

puis on effectuera le changement de variable: $u = \tan t$, dans l'intégrale: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 t}\,dt$

EX VII a) Déterminer le domaine de définition de f , puis déterminer f'

i) $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{2x^2 + x - 3}$ ii) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ iii) $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x+3}$

iv) $f(x) = (2x - 3)^3$ v) $f(x) = 1 + \sqrt{3x-1}$ vi) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

vii) $f(x) = (2x-7)^{\frac{3}{2}}$ viii) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-2x+1}}$ ix) $f(x) = 1 - 2.\cos(2x - 1)$

x) $f(x) = -2 + 3.\sin(\pi x - 1)$ xi) $f(x) = \cos^2 x$ xii) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$

xiii) $f(x) = 1 - \ln(-3x + 1)$ xiv) $f(x) = -x^2 \ln(-\frac{x}{2} + 1)$ xv) $f(x) = \log x$

xvi) $f(x) = -2.\frac{\ln x}{x^2}$ xvii) $f(x) = 2e^{2x} - e^x + 3$ xviii) $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}}{3}$

xix) $f(x) = (3x - 1)e^{2-x}$ xx) $f(x) = (-2x^2 + 3x + 1)e^{-2x+1}$ xxi) $f(x) = \ln|x-1| + |x|e^{x^2}$

b) Déterminer le domaine de définition de f , puis déterminer F une primitive de f

i) $f(x) = (4x - 5)(2x^2 - 5x + 1)$ ii) $f(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$ iii) $f(x) = \frac{1}{(2x-1)^3}$

iv) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-1}}$ v) $f(x) = (2x - 2)\sqrt{x-1}$ vi) $f(x) = 1 - \cos(2x + 1)$

vii) $f(x) = 3 - 2\sin(-x + 1)$ viii) $f(x) = \frac{1}{2x-1}$ ix) $f(x) = \frac{3x-1}{-2x+5}$

x) $f(x) = x + 1 + \frac{2}{1-3x}$ xi) $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{2x - 3}$ xii) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

xiii) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 2}{x^2}$ xiv) $f(x) = 4e^{3x-1}$ xv) $f(x) = x^2 - x + 1 + 2e^{-x+1}$

xvi) $f(x) = 5e^{2x} - 3e^x + 2$ xvii) $f(x) = (x+1)e^{-3x+2}$ xviii) $f(x) = (x^2 + x + 1)e^{2x-1}$

xix) $f(x) = \log x$ xx) $f(x) = \ln(2x+3)$ (3 manières différentes)

xxi) $f(x) = \ln(ax+b)$ (2 manières différentes) xxii) $f(x) = x.\ln x$

xxiii) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ xxiv) $f(x) = x\sqrt{x-2}$ xxv) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2x-1}}$

xxvi) $f(x) = x.\sin 3x$ xxvii) $f(x) = x^2 \cos x$ xxviii) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

xxix) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ xxx) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+1}$

xxxi) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+2}$ (on calculera: $\int_0^x \dfrac{1}{t^2+2t+2}\,dt$, avec changement de variable: $t = u - 1$)

xxxii) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ (on calculera: $\int_0^x \dfrac{1}{\sqrt{t^2+4}}\,dt$, avec changement de variable: $u = t + \sqrt{t^2+4}$)

EX VIII Calculer les intégrales:

i) $\int_{-1}^{5} (|x| + |x+3|)\,dx$ ii) $\int_1^e (x+1)\ln x\,dx$ iii) $\int_{-1}^{\frac{e-3}{2}} \dfrac{2x^2+x-4}{2x+3}\,dx$

EX IX: 1) On considère les fonctions f_a d'une variable réelle indicées par le paramètre a réel

$$f_a(x) = a - \ln\left(\frac{1}{3}x + 1\right)$$

a) Déterminer l'ensemble de définition de f_a

b) Etudier le sens de variation de f_a sur son ensemble de définition

2) On considère les fonctions g_a d'une variable réelle, indicées par le paramètre a réel

$$g_a(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{3}x} & , \text{ si } x \leq 0 \\ f_a(x) & , \text{ si } x > 0 \end{cases}$$ où f_a est définie au 1)

a) Déterminer a pour que g_a soit continue en $x = 0$

b) Pour la valeur de a obtenue au a) étudier la dérivabilité de g_a en $x = 0$

c) Déterminer le zéro de g_1

d) Le graphe de g_1 présente-t-il des points d'inflexion ?

e) Etudier les limites de g_1 aux bornes de son ensemble de définition

f)i) Etudier le sens de variation de g_1

ii) Construire le graphe de g_1 dans l'intervalle $[-6 ; 6]$

g) Calculer l'aire de la surface délimitée par le graphe de g_1 et les axes de coordonnées

EX X: On donne la fonction d'une variable réelle x : $f : x \mapsto (x^2 - 1).e^{-x}$

On désigne par F le graphe de f dans un repère orthonormé

a) Déterminer le domaine de définition, les zéros, les extremums de f ainsi que l'asymptote de f

b) Tracer F

c) Calculer l'aire du domaine borné compris entre F et l'axe Ox

EX XI: On considère les fonctions d'une variable réelle indicées par le paramètre p réel non nul:

$f_p : x \mapsto e^{px}.(x - 3)$

a) Etudier en fonction de p , le caractère croissant ou décroissant de f_p

Déterminer les zéros et les extremums éventuels de f_p

b) Quelle valeur faut-il donner à p afin que f_p ait un extremum pour $x = 0$

Pour la suite de l'exercice, on fait $p = 1$

c)i) Dans un repère orthonormé, tracer le graphe F de la fonction $f: x \mapsto e^x.(x-3)$

ii) Déterminer une équation de la tangente d'inflexion à F

iii) Calculer l'aire de la surface délimitée par F et les axes de coordonnées

d) Parmi les fonctions $g : x \mapsto m.\frac{1}{x} + n$ (m et n réels) , il en existe une dont le graphe est tangent à F au point (3;0) . Calculer dans ce cas m et n

EX XII: On donne la fonction d'une variable réelle x : $f : x \mapsto \begin{cases} (x^2+1)e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x\ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

F est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité 2 cm)

a) Etudier: i) La continuité de f en $x = 0$ ii) La dérivabilité de f en $x = 0$

b)i) Etudier la fonction f (Limites aux bornes de son domaine de définition, l'asymptote de F , sens de variation de f , extremum et les points d'inflexion de F)

ii) Esquisser le graphe de f

c)i) Déterminer l'abscisse des points d'intersection de F et de la droite $d : y = 1 - \frac{x}{2}$

ii) $0 < \lambda \leq e^{\frac{1}{2}}$

Exprimer en fonction de λ , l'aire $A(\lambda)$ du domaine $D = \left\{ M(x;y) / \begin{cases} \lambda \leq x \leq e^{\frac{1}{2}} \\ 1 - \frac{x}{2} \leq y \leq 1 - x\ln x \end{cases} \right\}$

iii) Déterminer $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} A(\lambda)$

EX XIII: 1) Résoudre l'équation différentielle (E) (y est une fonction de x)

i) (E): $5y' = 2y + 1$ sur: $\mathbb{R}$ et $y(0) = 1$

ii) (E): $2y'' + 4,5y = 0$ sur: $\mathbb{R}$ $y(\frac{\pi}{6}) = 1$ et $y'(\frac{\pi}{6}) = -1$

EX XIV: On considère la fonction d'une variable réelle définie par: $f: x \mapsto \frac{x^2 - 3}{x + 2}$

On appelle F la représentation graphique de f dans le repère orthonormé Oxy

a) Déterminer l'ensemble de définition de f, les coordonnées des points d'intersection de F avec les axes de coordonnées, et une équation de chaque asymptote à la courbe F

b) Tracer F

c) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe F et l'axe des abscisses

EX XV

1)a) Déterminer les réels a et b tels que: pour tout réel x : $\dfrac{1}{x(1+x^2)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx}{x^2+1}$

b) Déterminer une primitive de la fonction: $x \mapsto \dfrac{1}{x(1+x^2)}$

2) Déterminer par parties une primitive de la fonction: $x \mapsto \dfrac{2x\ln x}{(1+x^2)^2}$

EX XVI

1) On considère la fonction d'une variable réelle définie par: $f: x \mapsto (\ln x + 1).\ln x$

a) Montrer que: $\forall x \in]0 ; +\infty[\qquad 2\ln x + 1 \geq 0 \iff x^2 \geq \dfrac{1}{e}$

b) Dresser le tableau de variation de f

c) Résoudre l'équation $f(x) = 0$

d) Déduire de ce qui précède le tableau de signe de f

2) On considère la fonction d'une variable réelle définie par: $F : x \mapsto x(f(x) - 2\ln x + 1)$

Dresser le tableau de variation de F