EXERCICES DE REVISION ---------4MATH
Mr Y.BOULILA

EXERCICE NI Soit f la fonction définie, sur [–3 ; 3], par $f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$ et (C) sa courbe représentative

dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
2) Tracer la courbe (C).
3) On considère l'ellipse (E) d'équation $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

   Montrer que (C) est une partie de (E) et tracer (E).
4) A l'aide du changement de variable $x = 3\cos\theta$, on trouve :

   $\int_{-3}^{3} f(x)dx = 6\int_0^{\pi}\sin^2\theta\, d\theta$ (on ne demande pas de démontrer cette égalité).

   Déduire de cette égalité l'aire du domaine limité par (E).

EXERCICE NII

Soit f la fonction définie, sur $]\frac{1}{e}\,;+\infty[$, par $f(x)=\frac{x}{1+\ln x}$ et l'on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$; *(unité : 2 cm)*.

A- 1) Calculer $\lim\limits_{x\to\frac{1}{e}} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

2) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

3) a- Démontrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion W d'abscisse e.
   b- Ecrire une équation de la tangente (d) à (C) au point W.

4) Etudier suivant les valeurs de x, la position relative de (C) et de la droite (D) d'équation $y = x$.

5) Tracer (d), (D) et (C).

B- Soit l'intervalle I = [1 ; e].

1) a- Démontrer que f(I) est inclus dans I.

   b- Etudier le signe de $f'(x)-\frac{1}{4}$ et en déduire que, pour tout x de I, $0 \le f'(x) \le \frac{1}{4}$.

   c- Démontrer que, pour tout x de I, on a : $|f(x)-1| \le \frac{1}{4}|x-1|$.

2) Soit (U_n) la suite définie par :

$U_0 = 2$ et pour tout $n \geq 0$, $U_{n+1} = f(U_n)$.

a- Démontrer par récurrence sur n que U_n appartient à I.

b- Démontrer que $\left|U_{n+1} - 1\right| \leq \frac{1}{4}\left|U_n - 1\right|$.

c- Démontrer que $\left|U_n - 1\right| \leq \frac{1}{4^n}$ et en déduire la limite de U_n lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE NIII

A- On considère l'équation différentielle (I) : $xy' - y = 1 - 2\ln x$.

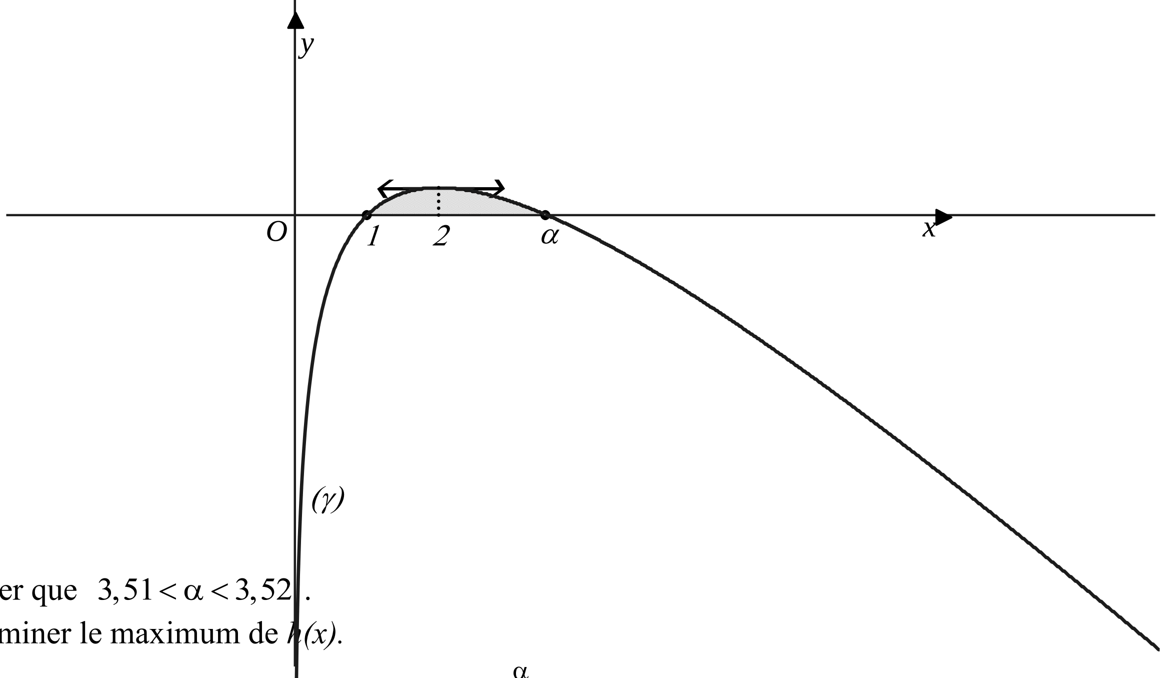
1- Vérifier que $y_1 = 1 + 2\ln x$ est une solution particulière de l'équation (I).

2- Déterminer la solution générale Y de l'équation différentielle $xy' - y = 0$.

3- a) Vérifier que $Y + y_1$ est la solution générale de l'équation différentielle (I).

b) Déterminer la solution particulière y de l'équation (I) telle que $y(1) = 0$.

B- La figure ci-dessous, montre la courbe représentative (γ), dans un repère orthonormé, de la fonction h définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $h(x) = 1 - x + 2\ln x$.



1- a) Montrer que $3,51 < \alpha < 3,52$.

b) Déterminer le maximum de $h(x)$.

2- a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^{\alpha} \ln x \, dx$ en fonction de α.

b) En déduire l'aire $S(\alpha)$ du domaine hachuré limité par (γ) et l'axe des abscisses.

C- Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1 + 2\ln x}{x^2}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$.

1- a) Déterminer le point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.

b) Montrer que les axes du repère sont asymptotes à (C).

2- a) Dresser le tableau de variations de f et montrer que $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha}$.

b) Tracer (C).

3- a) Montrer que la restriction de f à l'intervalle $[1;+\infty[$ admet une fonction réciproque f^{-1}.

b) Déterminer le domaine de définition et le domaine de dérivabilité de f^{-1}.

c) Résoudre l'inéquation $f^{-1}(x)>\alpha$.

D- Soit (I_n) la suite définie, pour $n\geq 4$, par $I_n=\int_n^{n+1} f(x)\,dx$.

1- Démontrer que, pour tout x dans l'intervalle $[4;+\infty[$, $0\leq f(x)\leq \frac{1}{x}$.

2- En déduire que, pour tout entier naturel $n\geq 4$, $0\leq I_n\leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

3- Déterminer la limite de la suite (I_n).

EXERCICE NIV

Soit f la fonction définie sur $I=]0;+\infty[$ par $f(x)=x^2+\ln x$ et (C) sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

A- 1) Calculer f '(x) et déterminer le sens de variations de f sur $]0;+\infty[$.

2) a- Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et déduire une asymptote à (C).

b- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

c- Dresser le tableau de variations de f.

d- Déduire que l'équation $x^2+\ln x=0$, admet une solution unique α et que $0,6<\alpha<0,7$.
Etudier le signe de f(x) suivant les valeurs de x.

3) a- Démontrer que (C) admet un point d'inflexion dont on déterminera l'abscisse.
b- Tracer (C).

4) a- Démontrer que f admet sur I, une fonction réciproque f^{-1} dont

on déterminera le domaine
de définition.

b- Soit (C') la courbe représentative de f^{-1}. Prouver que le point A(1;1) est commun à (C) et (C') et tracer (C') dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

c- Ecrire une équation de la tangente en A à (C').

d- Soit S(α) l'aire du domaine limité par (C), (C'), l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
Calculer S(α).

B- Soit (T) la courbe représentative de la fonction h définie sur $I =]0;+\infty[$ par $h(x) = \ln x$.

1) Etudier la position relative de (C) et (T) et tracer (T) dans le même repère que (C).

2) Soit g la fonction définie sur I par $g(x) = x^2 + (\ln x)^2$.

a- Calculer g'(x) et vérifier que $g'(x) = \frac{2}{x} f(x)$.

b- En déduire le sens de variations de g sur I.

3) Soit M_0 le point de (T) d'abscisse α et M un point quelconque de (T) d'abscisse x.

a- Calculer OM_0^2 en fonction de α et OM^2 en fonction de x.

b- Prouver que $OM_0 \leq OM$ pour tout x de I.

c- Démontrer que la tangente en M_0 à (T) est perpendiculaire à (OM_0) .

QCM

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner, **en justifiant,** la réponse qui lui correspond.

N°	Questions	Réponses			
		a	b	c	d
1	La solution particulière de l'équation différentielle $y' - \frac{1}{2}y = 0$, qui vérifie y(-2) = 1, est :	$y = -2e^{\frac{x}{2}}$	$y = e^{\frac{x}{2}+1}$	$y = 2\cos x - \sin x$	$y = \sqrt{x^2 - 3}$

2	$f(x) = 2\sin(\pi x + 2)$. La période de f est : T =	π	2	2π	$\frac{\pi}{2}$
3	L'équation $2\ln x = \ln(2x)$ admet :	2 racines	Une racine unique	Aucune racine	3 racines
4	Si $f(x) = \ln\lvert -3x \rvert$, alors $f'(x) =$	$\frac{3}{x}$	$\frac{-3}{x}$	$\frac{1}{\lvert x \rvert}$	$\frac{1}{x}$
5	$e^{\frac{1}{2}\ln 9} \times e^{-\ln\frac{1}{3}} =$	e^3	6	$e^{\frac{3}{2}}$	9
6					

EXERCICE NVI

A- Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x + xe^{-x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ *(unité 2 cm).*

1) a- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d) d'équation $y = x$ est une asymptote à (C).

b- Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$.

2) a- Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

b- Dresser le tableau de variations de f ' et en déduire que $f'(x) > 0$.

c- Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

d- Dresser le tableau de variations de f.

3) Déterminer les coordonnées du point A de la courbe (C) où la tangente (T) est parallèle à la droite

(d) d'équation $y = x$.

4) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une racine unique α et vérifier que $0,65 < \alpha < 0,66$.

5) Tracer (d), (T) et (C).

6) Calculer, en cm^2, l'aire du domaine limité par la courbe (C), l'asymptote (d) et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

7) On désigne par g la fonction réciproque de f et par (G) sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Préciser l'asymptote et la direction asymptotique de (G) et tracer (G).

B- Soit f_n la fonction définie sur IR par $f_n(x) = x + x^n e^{-x}$ (n est un entier naturel non nul)

et soit la suite (U_n) définie par : $U_n = \int_0^1 [f_n(x) - x]dx$.

1) Déterminer la valeur de U_1.

2) Montrer que $0 \leq x^n e^{-x} \leq 1$ sur $[0 ; 1]$ et en déduire que la suite (U_n) est bornée.

3) Démontrer que la suite (U_n) est décroissante. La suite (U_n) est-elle convergente ? Justifier.

EXERCICE VII

ABC est un triangle rectangle isocèle tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$

$[2\pi]$.

I, J et K sont les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB].

r est la rotation de centre I et d'angle de mesure. t est la translation de vecteur

f = rot et g = tor.

1°- a) Montrer que AKIJ est un carré.

En déduire l'image de K par t et celle de J par r.

b) Déterminer l'image de K par f et celle de J par g.

En déduire la nature et le éléments caractéristiques de f et g.

c) Déterminer l'image de A par $go(f^{-1})$. Caractériser alors cette transformation.

2°- Utiliser les méthodes de décomposition de r et t en deux symétries orthogonales pour retrouver $go(f^{-1})$.

3°- a) Tracer les cercles C et C ' de diamètres respectifs [A B] et [A C].

b) Soit r' la rotation de centre I et d'angle de mesure .

Soit M un point de C et on pose M' = r '(M). Montrer que C ' est l'image de C par r **'.**

Construire M'.

c) M étant distinct de I, les droites (IM) et (IM’) recoupent respectivement C’ en N’ et C en N. Montrer que N’ est l’image de N par r’.

d) On construit les carrés MIM’P et NIN’Q. Montrer que les points P et Q sont respectivement les images des points M et N par une similitude directe S dont on précisera centre, rapport et angle.

e) En déduire les ensembles décrits par les points P et Q lorsque M décrit C.