

Exercice n°1(4pts)

Répondre par Vrai ou Faux à chacune des propositions suivantes .Aucune justification n'est demandée

1) Toute suite convergente et bornée est convergente

2) L'équation $z^2 = -16$ admet dans l'ensemble \mathbb{C} exactement deux solutions

3) Soit f une fonction continue et strictement croissante sur l'intervalle $] -1, 1[$ et telle que $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow (1)^-} f(x) = +\infty$

L'équation $f(x) = 2010$ admet une solution unique dans l'intervalle $] -1, 1[$

4) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$ alors $\arg(-\bar{z}) \equiv \pi + \theta[2\pi]$

Exercice n°2 (5pts)

1) Ecrire sous forme algébrique $(1 + 3i)^2$

2) a) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E): $z^2 + (1 - i)z + 2 - 2i = 0$

b) Mettre les solutions de (E) sous forme exponentielle

3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) .On considère les points A, B et C d'affixes respectives $2i, -1 - i$ et $3 + i$

a) Déterminer la nature du triangle ABC

b) Soit D le point d'affixe $z_D = 2 - 2i$.Calculer $\frac{z_A - z_D}{z_B - z_C}$

c) Montrer que ABDC est carré

Exercice n°3(5pts)

On considère la suite définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{1}{u_n} \right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n \geq 1$

2) Montrer que u_n est décroissante

3) a) Montrer que u_n est convergente

b) Calculer la limite de u_n

Exercice n°4(6pts)

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \begin{cases} 5x^3 + 2x^2 + x + 1, & x \leq 0 \\ 1 + \frac{1-\cos x}{x} & x > 0 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue en zéro

2) Calculer la limite de f en $-\infty$

3) a) Montrer que pour tout $x > 0$ on a : $1 \leq f(x) \leq 1 + \frac{2}{x}$

b) En déduire la limite de f en $+\infty$

4) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet un unique solution α dans l'intervalle $] -1, 0[$

b) Etudier le signe de f pour $x \in \mathbb{R}$

5) Soit h la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par : $h(x) = f\left(\frac{1}{x-1}\right)$

Calculer la limite de h à droite en 1