Rotation 3ème Math KMH

Exercice 1

Dans un plan orienté ; on considère un triangle ABC tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $AB<AC$; On désigne par ζ le cercle circonscrit à ce triangle et par O son centre

1) Faire un figure
2) Soit $E=\left\{M\in P/(\overrightarrow{MB}\ ,\ \overrightarrow{MC})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]\right\}$
   a) Vérifier que $A\in E$ puis déterminer et construire E
   b) Déterminer et construire le point I tel que $IB=IC$ et $(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IC})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$
3) Soit P le point du segment $[AC]$ tel que $CP=AB$
   a) Montrer qu'il existe une unique rotation R telle que $R(A)=P$ et $R(B)=C$, quel est son angle
   b) Déterminer le centre de la rotation R
4) Donner la nature du triangle IAP et en déduire que : $AC=AI+AB$
5) Soit M un point variable de l'ensemble F et G le centre de gravité du triangle MBC. Déterminer et construire l'ensemble décrit par le point G lorsque M décrit E

Exercice 2

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé du plan

Soit f l'application qui à tout point $M(x\ ,\ y)$ du plan associe le point $M'(x'\ ,\ y')$ du plan tel que

$$\begin{cases} x'=\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{\sqrt{3}-2}{2} \\ y'=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{1+2\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

1) Montrer que f est une isométrie du plan
2) Montrer que le point $\Omega(-2\ ,\ 1)$ est l'unique point invariant par f
3) Soit les points $M(x\ ,\ y)$ et $M'(x'\ ,\ y')$ tel que $f(M)=M'$
   a) Exprimer en fonction de x et y $\overrightarrow{\Omega M}.\overrightarrow{\Omega M'}$ et $\det(\overrightarrow{\Omega M}\ ,\ \overrightarrow{\Omega M'})$
   b) En déduire la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{\Omega M}\ ,\ \overrightarrow{\Omega M'})$
   c) Quelle est alors la nature de f

Exercice 3

Dans un plan orienté ; on considère un parallélogramme ABCD de sens direct

1) Construire le triangle IAD rectangle et isocèle en I tel que $(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{ID})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et le triangle DCE rectangle isocèle en D tel que $(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$
2) Soit R la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$
   a) Quelle est l'image de A par R
   b) Montrer que $R(B)=E$
3) Soit A' le symétrique de A par rapport à I.
   a) Justifier que $A'=R(D)$
   b) Montrer que $A'E=BD$ et que les droites $(A'E)$ et (BD) sont perpendiculaires

Exercice 4

Dans un plan orienté ; on considère un carré ABCD tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$. Soit $r=R_{\left(A\ ,\ \frac{\pi}{2}\right)}$

1) Préciser les images par r des c

2) Soit le point P tel que $\overrightarrow{BP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. La droite (AP) coupe (CD) en Q. La perpendiculaire à (AP) menée par A coupe (BC) en K et (CD) en S

a) Préciser les images par r des droites (AP) et (AK)

b) Montrer que $r(K)=Q$ et $r(P)=S$

c) Soient les points I et J milieux respectifs des segments $[KP]$ et $[QS]$

Montrer que le triangle AIJ est rectangle isocèle

3) Montrer que les droites (PS) et (QK) sont perpendiculaires

Exercice 5

Dans un plan orienté ; on considère un triangle ABC de sens direct. BAB' et ACC' deux triangles rectangles et isocèles en A et de sens direct

1) En utilisant la rotation r_1 de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, montrer que : $BC'=B'C$ et que $(BC')\perp(B'C)$

2) a) Montrer qu'il existe une unique rotation r_2 qui transforme B en C et C' en B'

b) Déterminer son angle θ et construire son centre J

3) Soit $E=B*C'$ et $F=C*B'$

a) Déterminer $r_1(F)$ et $r_2(E)$

b) En déduire que AFJE est un carré

Exercice 6

Dans un plan orienté ; on considère un triangle ABC rectangle et isocèle en A tel que : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{2}[2\pi]$ on désigne par I le milieu de $[BC]$ et par Δ la droite perpendiculaire à (BC) et passant par C et on désigne par K le point d'intersection de Δ et (AB)

1) Faire un figure

2) Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

a) Déterminer $R(B)$, $R((AC))$ et $R((BC))$

b) Déduire $R(C)$ et $R(I)$

3) On désigne par ζ le cercle circonscrit au triangle ABC

Déterminer l'image ζ' du cercle ζ par la rotation R puis déterminer $\zeta\cap\zeta'$

4) Soit M un point du plan tel que : $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})\equiv\frac{5\pi}{4}[2\pi]$

a) Déterminer l'ensemble des points M

b) On pose $M'=R(M)$, déterminer l'ensemble des points M' lorsque M varie

c) On pose $R(I)=J$, montrer que $(BM)\perp(CM')$ et que $IM=JM'$

Exercice 7

Dans un plan orienté ; on considère un parallélogramme ABCD de centre O tel que $AB\neq AD$

$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Soit E le point du plan tel que CED est un triangle équilatéral direct

1) a) Montrer qu'il existe une unique rotation R telle que $R(A)=E$ et $R(B)=D$

b) Déterminer son angle θ et construire son centre I

2) La droite (EC) coupe (AB) en F

a) Montrer que $D\in[AE]$, montrer que le triangle AFE est équilatéral direct et montrer que $R(f)=A$

b) En déduire que I est le centre du cercle ζ circonscrit au triangle AEF

3) Soit R' la rotation de centre C et d'angle $\frac{-\pi}{3}$

a) Déterminer $R'(D)$ et $R'(F)$

b) En déduire que les droites (FD) et (BE) sont sécantes en un point J

c) Montrer que $(\overrightarrow{JD},\overrightarrow{JB})\equiv\frac{2\pi}{3}$

4) On désigne par ζ' le cercle circonscrit au triangle ABD

Montrer que le cercle ζ' passe par I et J

Exercice 8

Dans un plan orienté ; on considère un carré ABCD de centre O tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1) a) Montrer que $R(D) = A$ et $R(C) = D$

b) Déterminer la nature et les élément caractéristiques de $R \circ R$

c) En déduire que $R(A) = B$

2) Soit M un point du segment $[AD]$ distinct de A et D. La perpendiculaire à la droite (MC) passant par D coupe le segment $[AB]$ en un point N

a) Déterminer les images du segment $[AD]$ et de la droite (MC) par la rotation R

b) En déduire que $R(M) = N$

c) En déduire que $CM = DN$ et que $(CM) \perp (DN)$

3) Soit ζ le cercle de centre O et passant par A ; la demi-droite $[CM)$ recoupe le cercle ζ en E. Soit F le point de la demi-droite $[DN)$ tel que $DF = CE$

a) Montrer que $R(E) = F$

b) Déterminer l'image de ζ par R

c) En déduire l'ensemble des points F lorsque M varie sur le segment $[AD]$

Exercice 9

Dans un plan orienté ; on considère un triangle équilatéral ABC tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. Soit I le milieu de $[BC]$: Soit le point J tel que B est le milieu de $[JC]$

Soit la rotation R_1 de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et la rotation R_2 de centre B et d'angle $\frac{-2\pi}{3}$

1) Soit A' et B' les images respectifs des points A et B par l'application $R_1 \circ R_2$

Montrer que I est le milieu de $[AA']$ et que B est le milieu de $[AB']$

2) On pose $M_1 = R_1(M)$ et $M_2 = R_2(M)$

En précisant la nature de $R_1 \circ R_2^{-1}$. Montrer que pour tout point M du plan, I est le milieu $[M_1M_2]$

3) Montrer que l'application $R_1 \circ R_2$ est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle