

Exercice n°1 : (4 points)

Pour chaque question une seule réponse est exacte. La justification est non demandée.

- Le nombre complexe $a = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ est une racine :
 - Huitième de l'unité
 - Sixième de l'unité
 - Quatrième de l'unité
- Pour tout réel α , l'équation (E) : $iz^2 + e^{i\alpha}z + 1 = 0$ admet dans \mathbb{C} deux solutions z_1 et z_2 . On a donc :
 - $z_1 + z_2 = ie^{i\alpha}$
 - $z_1 \cdot z_2 = i$
 - $z_1 + z_2 = -ie^{i\alpha}$
- Soit z' et z'' deux nombres complexes non nuls d'arguments respectifs $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{7\pi}{6}$. On a alors :
 - $\frac{z'}{z''}$ est réel
 - $z' \cdot z''$ est réel
 - $z' \cdot z''$ est imaginaire pur.
- Soit la fonction f définie sur $]0, \frac{1}{4}[$ par : $f(x) = \frac{\sqrt{x+4}-2}{-x^2+\frac{x}{4}} + x$. Alors : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{f(x)-1}{x} \right]$
 - est l'infini
 - est un réel
 - n'existe pas

Exercice n°2 : (3 points)

Soit θ un réel de $[0, \pi]$. On considère dans \mathbb{C} l'équation : $(E_\theta) : z^2 - (3\cos\theta + 3 - 3i)z + 9\cos\theta - 9i = 0$.

- Vérifier que $z_0 = 3$ est une solution de (E_θ) puis déterminer l'autre solution z_1 .
- Dans un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , soit A et M d'affixes respectives $z_A = 3$ et $z_M = 3\cos\theta - 3i$. Déterminer l'ensemble des points M lorsque θ décrit $[0, \pi]$. Déterminer θ pour que le triangle OAM soit rectangle en O .

Exercice n°3 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$ et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et que $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = \frac{4}{(\sqrt{x^2-2x+5})^3}$.
 - Montrer que $I(1,0)$ est un centre de symétrie de (C_f) . Donner une équation de la tangente à (C_f) en I .
 - Dresser le tableau de variation de f .
- Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur $] -1, 1 [$. Construire les courbes (C_f) de f et $(C_{f^{-1}})$ de f^{-1} .
- Montrer que $\forall x \in] -1, 1 [: f^{-1}(x) = 1 + \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$.
 - Montrer que f^{-1} admet des primitives sur $] -1, 1 [$. Déterminer la primitive F de f^{-1} égale à 1 en 0.

Exercice n°4 : (7 points)

Soit f une fonction continue et dérivable sur \mathbb{R} et F une primitive de f sur \mathbb{R} . On a représenté dans la page suivante et dans un repère orthogonal, les courbes de f et F .

- Justifier que (\mathcal{H}) est la courbe de F puis dresser son tableau de variation.
 - Justifier que F admet quatre points d'inflexion. Ecrire une équation de la tangente à (\mathcal{H}) au point d'inflexion d'abscisse $x_0 \in]1, 6[$.
- Montrer que la restriction g de F à $] -\infty, 1 [$ admet une fonction réciproque.
 - Déterminer graphiquement : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{g^{-1}(x)}{x} \right]$, $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{g^{-1}(x)}{x} \right]$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{g^{-1}(x)-1}{x-1} \right]$.
 - Construire la courbe de g et la courbe de g^{-1} dans un repère orthonormé \mathbf{R} .
- Soit la fonction U définie sur $] -\infty, 0 [$ par : $U(x) = F^2(x) + 2F(x) - 3$.
 - Etudier les variations de U . Montrer que : $U(x) = 0$ admet dans $] -\infty, 0 [$ une solution unique $\alpha < -\frac{1}{2}$.
 - Montrer que : $\alpha = g^{-1}(-3)$. Résoudre, alors, sur le graphique du repère \mathbf{R} , $U(x) = 0$.
- Soit $V(x) = F(2\tan^2(x))$ et (Γ) sa courbe dans un repère orthogonal.
 - Justifier qu'il suffit d'étudier V sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Dresser le tableau de variation de V .
 - Construire la partie de (Γ) sur $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Lycée secondaire : Ali Bourguiba Kalâa Kbira

Année scolaire : 2010-2011

Epreuve : Mathématiques

Devoir de synthèse n° 1

Durée : 2 heures

Professeur : Maâtallah

Date : Le 09-12-2010

Classe : 4 Tec₂

