L.S. 07/11/1987

Prof : Najjar .T

Devoir de contrôle n°1
Mathématiques

Classe : 4 Sc. Exp 2

Durée : 2 heures

-Il est recommandé de soigner la rédaction et présentation de la copie-

Exercice n°1 : (4 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois reposées proposées est exacte. Indique sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse .Aucune justification n'est demandée.

(1) Dans plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(o,\vec{u},\vec{v}\right)$.On considère les point M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2 non nuls et tel que $\frac{z_1}{z_2}=e^{i\frac{\pi}{2}}$

(a) Le triangle OM_1M_2 est un triangle équilatéral.

(b) Le triangle OM_1M_2 est un triangle rectangle et isocèle.

(c) Le points O, M_1 et M_2 sont alignes.

(2) Pour tout réel θ de $0,2\pi$ on pose $z(\theta)=1+e^{i\theta}$. Alors

(a) $z(\frac{\pi}{3})=e^{i\frac{\pi}{3}}$

(b) pour tout réel θ de $0,2\pi$, $z(\frac{\pi}{3}).e^{i\frac{\pi}{6}}$ est réel.

(c) pour tout réel θ de $0,2\pi$, $z(\frac{\pi}{3}).e^{-i\frac{\pi}{6}}$ est réel.

(3) Soit z et m deux nombres complexes on a $\overline{iz+(1+i)m}$ égale à :

(a) $-i\overline{z}+(1-i)\overline{m}$

(b) $-i\overline{z}+(1-i)m$

(c) $-iz+(1-i)m$

Exercice n°2 : (4 points)

Soit f une fonction définie sur IR par : $\begin{cases} f\ x\ =2x+1-\sin x\ ,\ \text{si}\ x\ <\ 0 \\ f\ x\ =\dfrac{x+\cos x}{x^2+1}\ \ \ ,\ \text{si}\ x\ \geq 0\end{cases}$

(1) Montrer que f est continue en 0.

(2) (a) Montrer que : $\forall x\geq 0\ ;\ \dfrac{x-1}{x^2+1}\leq f\ x\ \leq\dfrac{x+1}{x^2+1}$

(b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f\ x$.

(3) (a) Montrer que $\forall\ x<0\ ;\ 2x\leq f\ x\ \leq 2x+2$.

(b) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f\ x$.

Exercice n°3 : (6 points)

(1) Résoudre dans ℂ l'équation $(E): z^2-\sqrt{2}(1+i)z-1+i=0$.

(2) Soit α un réel de l'intervalle $]0,\pi[$

Résoudre dans ℂ l'équation $(E_\alpha): z^2-2e^{i\alpha}z+e^{2i\alpha}-1=0$.

(3) Le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A=1+e^{i\alpha}$, $z_B=-1+e^{i\alpha}$, $z_C=1+(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)$ et $z_D=-1+(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)$.

(a) Vérifier que $z_A=2\cos\frac{\alpha}{2}e^{i\frac{\alpha}{2}}$ et $z_B=2i\sin\frac{\alpha}{2}e^{i\frac{\alpha}{2}}$.

(b) En déduire la forme exponentielle de z_C et z_D.

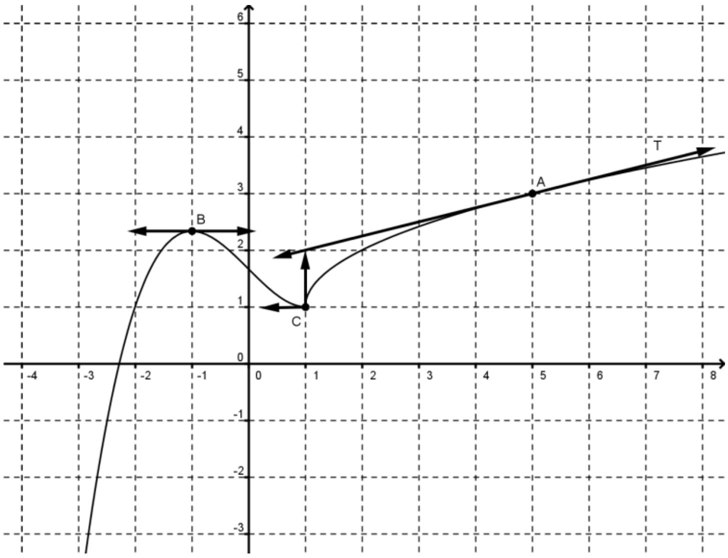
(c) Déduire de (a) que le triangle OAB est un triangle rectangle en O.

(d) Déterminer la valeur de α tel que le triangle OAB soit isocèle en O.

(5) Soit M un point d'affixe z déterminer l'ensemble de point M tel que $\left|\frac{z-z_C}{z-z_D}\right|=1$.

Exercice n°4 : (6 points)

Soit f la fonction, définie et continue sur IR, représentée par la courbe ζ_f dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$. La droite T passant par $F(1;2)$ est la tangente à ζ_f au point A (5 ; 3). La Courbe ζ_f admet au point $C(1;1)$ deux demi-tangentes l'une est parallèle à l'axe des ordonnés et l'autre parallèle à l'axe des abscisses. Au point B $(-1,\frac{7}{3})$ la courbe ζ_f admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses.



Par la lecture graphique :

(1) (a) Déterminer $\lim\limits_{+\infty} f$ et $\lim\limits_{-\infty} f$.

(b) Donner $f(-1)$ et $f'(-1)$

(2) (a) Déterminer une équation de la droite T.

(b) En déduire $f'(5)$

(3) Déterminer $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-1}{x-1}$ et $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-1}{x-1}$.

(4) (a) Dresser le tableau des variations de f.

(b) Déterminer $f(]-\infty,-2])$ et $f([2,5])$.

(5) (a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet un unique solution $\alpha\in]-3,-2[$.

(b) Sachant que pour tout $x\le1$, $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x+\frac{5}{3}$. Déterminer une valeur approche de α à 10^{-1}.

Bon Travail