Lycée Pilote kairouan Année Scolaire 2009-10		Prof :Troudi kamel Devoir de Contrôle N°1	
8-11-2010	Classe : $4^{ème}M_1$	MATHEMATIQUES	Durée : 2 h

Exercice N°1 (3points)

Feuille a remettre

Exercice N°2 (6points)

Le graphique ci-dessous (Voir annexe 2) est la courbe $\mathscr{C}$ représentative d'une fonction f continue sur $]-1,+\infty[$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Δ et Δ' sont des asymptotes de $\mathscr{C}$

1) a) A l'observation de cette courbe, Calculer $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x$, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que l'équation f'(x) = 3/8 admet une solution unique c dans]2,4[.

2) Soit g la restriction de f sur $[2,+\infty[$

a) Justifier graphiquement que g réalise une bijection de $[2,+\infty[$ sur un intervalle I à préciser.

b) Tracer dans le même repère la courbe $\mathscr{C}'$ représentative de g^{-1} la fonction réciproque de g.

c) Donner graphiquement et justifier : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{g^{-1}(x)-2}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g^{-1}(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin(x)g^{-1}\left(\dfrac{1}{\sin(x)}\right)$.

Exercice N°3 (5points)

Soit f la fonction définie sur $]0,\pi]$ par : $f(x)=\dfrac{-1+x\sin x}{x}$:

1) a) Montrer que f est dérivable sur $]0,\pi]$ et calculer f '(x).

b) Dresser le tableau de variation de f '. En déduire l'existence d'un unique réel x_0 de $]0,\pi]$ tel que f '(x_0)=0.

c) Donner alors le signe de f '(x) sur $]0,\pi]$.

2) a) Calculer $f(\frac{\pi}{2})$ et $f'(\frac{\pi}{2})$.En déduire la position du réel x_0 par rapport à $\frac{\pi}{2}$ ainsi que le signe de f(x_0).

b) Montrer alors que l'équation f(x) = 0 admet exactement deux p et q sur $]0,\pi]$.

Exercice N°4 (6points)

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on donne les points $A(i)$ et $B(-i)$, et le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$. Soit F l'application qui à tout point $M(z)$ de $P\setminus\{O\}$ on associe le point $M'(z')$ de P tel que $z' = f(z) = \dfrac{z^2+1}{z}$. On note $M'' = S_{(O,\vec{u})}(M)$

1) a) Déterminer $F(A)$ et $F(B)$.

   b) F admet-elle des points invariants ?

   c) Montrer que la droite (AB) est globalement invariante par F (si $M \in (AB)$ alors $M' \in (AB)$)

2) a) Exprimer z' en fonction de $\cos\theta$ si $z = e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$

   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $f(z) = 2\cos\theta$ où $\theta \in \mathbb{R}$; mettre chacune des solutions sous la forme exponentielle

   c) En déduire que si M décrit le cercle $\mathscr{C}$ alors M' décrit un segment qu'on précisera

3) a) Vérifier que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a $z' - z = \dfrac{1}{z}$

   b) En déduire que $MM' = \dfrac{1}{OM}$ et que $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{OM''}$ sont deux vecteurs colinéaires de même sens

   c) En déduire que si $M \in \mathscr{C}$ alors $OMM'M''$ est un losange

4) a) Montrer que pour tout point M distinct de A et B on a : $\begin{cases} \dfrac{OM'}{BM} = \dfrac{AM}{OM} \\ \left(\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{OM'}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AM}}\right) [2\pi] \end{cases}$

   b) Construire en justifiant le point M' dans le cas où $M \in \Delta$ avec Δ est la médiatrice de $[OA]$

Nom & prénom: ………………………………………………………………

Pour chacune des questions, une seule des trois propositions est exacte. L'élève doit écrire sur sa copie la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

1) L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\frac{z-2}{z-1}=z$ est :

a) $\{1-i\}$ b) L'ensemble vide c) $\{1-i\,;1+i\}$

2) Le nombre complexe $u=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{24}}$ est une racine sixième de :

a) $8e^{i\frac{\pi}{3}}$ b) $\sqrt{12}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ c) $8e^{i\frac{\pi}{4}}$

3) Soient *A* et *B* les points d'affixes respectives 4 et 3*i*.

L'affixe du point *C* tel que le triangle *ABC* soit isocèle avec $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ est :

a) $1-4i$ b) $-3i$ c) $7+4i$

4) On pose ; M' = **t**$\circ$**r** (M), avec r $=r_{(O,\frac{\pi}{2}-\theta)}$ et par **t** la translation de vecteur d'affixe –i Alors :

a) M'$\in(O,\vec{v})$ b) M'$\in(O,\vec{u})$ c) z' = $i(e^{-i\theta}z-1)$

(Figure 2)