Lycée H P Manouba
4éme Inf 2
Année scolaire : 2009-2010

Epreuve de : Mathématiques — Proposé par : Mr BEN ALI

DEVOIR DE SYNTHESE N°1

Date : Le 09 /12/ 2009 — Durée : 2 heures

NOM : ………………………………………………….. PRENOM : ……………………………………………
CLASSE : ……………………………………………… NUMERO : ……………………………………………

Exercice n°1 : Cocher la réponse exacte.

Soit f une fonction définie ,dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ tel que $f(x)<0$ si $x<2$ et $f(x)>0$ si $x>2$. ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé (0, $\vec{i}$, $\vec{j}$)
La droite d'équations $y=2x-1$ est une asymptote à ζ_f en $(+\infty)$

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=$

☐ $(+\infty)$ ☐ $(-\infty)$. ☐ 0

2) La tangente T à ζ_f au point M(2 , 0) passe par le point I (-1 , - 2) alors

☐ $f'(2)=-\frac{2}{3}$ ☐ $f'(2)=\frac{2}{3}$ ☐ $f'(2)=-\frac{1}{3}$

3) Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=(f(x))^2$ alors la fonction g est strictement croissante sur :

☐ $\mathbb{R}$ ☐ $]2,+\infty[$ ☐ $]-\infty,2[$

Exercice n°2 :

1) a- Vérifier que : $(3+i)^2=8+6i$

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-(5+3i)z+2+6i=0$

2) Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans lui-même définie par : $f(z)=z^3-(5+i)z^2+4(2-i)z-12+4i$

a- Calculer $f(-2i)$

b- Déterminer les nombres complexes **b** et **c** pour que $f(z)=(z+2i)(z^2+bz+c)$ **.**

c- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=0$ **.**

3/ Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (o , $\vec{u}$, $\vec{v}$) , on considère les points A, B et C, d'affixes respectives $z_A=-2i$; $z_B=1+i$; $z_C=4+2i$.

a- Placer les points A, B et C dans le repère (o , $\vec{u}$, $\vec{v}$).
b- Montrer que ABC est un triangle isocèle.
c- Déterminer l'affixe z_D du point **D** pour que le quadrilatère **ABCD** soit un losange .

Exercice n°3 :

Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{1+\frac{1}{x}}$ et ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé (0, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

2) a- Montrer que f dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $x\in]0,+\infty[$ on a $f'(x)=\frac{-1}{2x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$

b- Dresser le tableau de variation de f et construire sa courbe représentative ζ_f

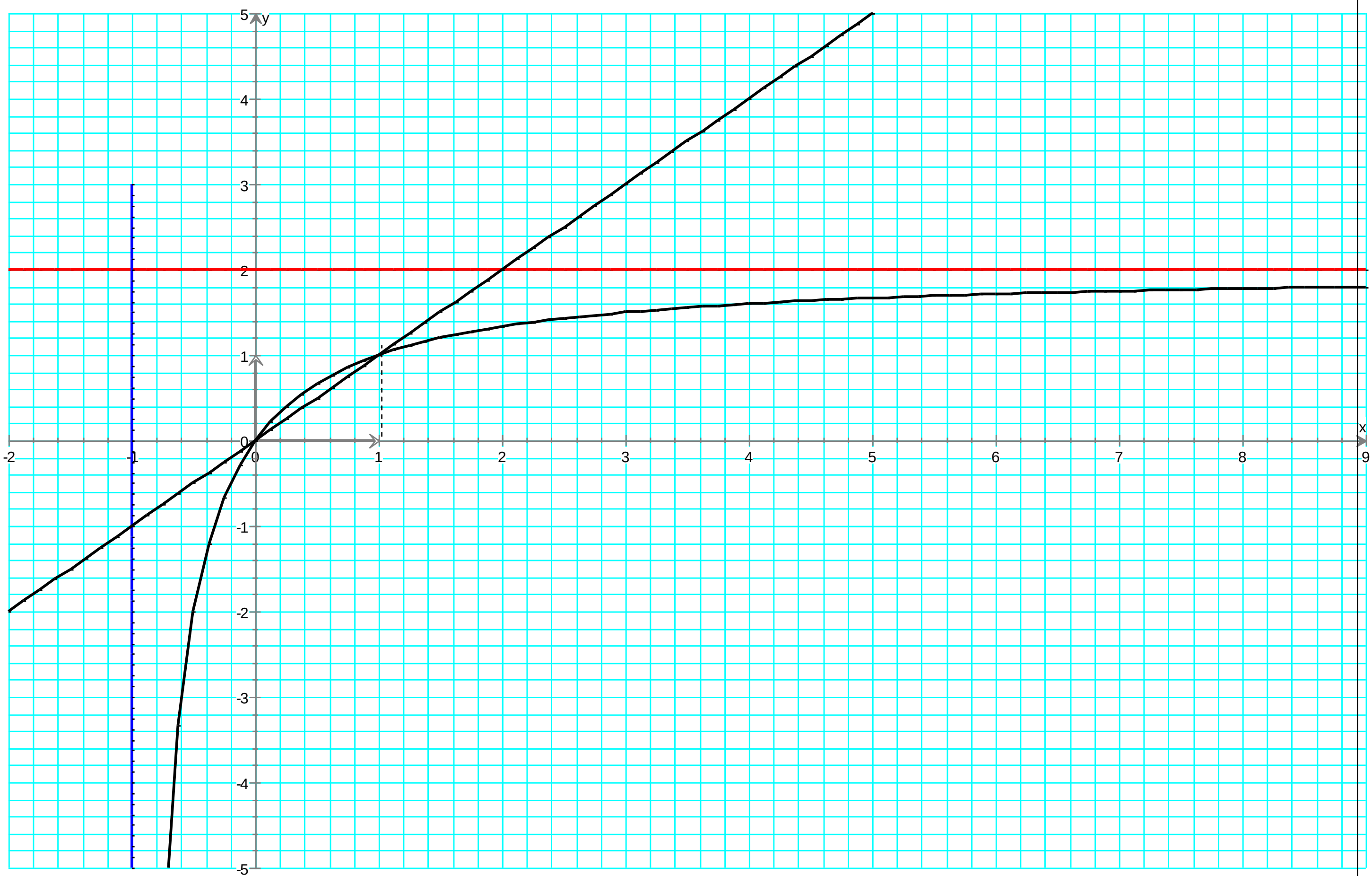
3) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet dans $]0,+\infty[$ une solution unique α et que $1<\alpha<2$.

4) a- Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle **J** que l'on précisera.

b- Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x\in$ **J**

c- Tracer la courbe ζ' de f^{-1} dans le même repère .

Exercice n° 4 :



Dans la figure ci-dessus on a la représentation graphique ζ_f d'une fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ .Les droites d'équations $y=2$ et $x=-1$ sont deux asymptotes à ζ_f et D la droite d'équation cartésienne $y=x$ tel que $\zeta_f\cap D=\{O(0,0),A(1,1)\}$

1) En utilisant le graphique

a- Déterminer le tableau de variation de f .

b- Etudier le signe de $f(x)-x$ sur $]-1,+\infty[$.

2) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0=4 \\ u_{n+1}=f(u_n) \text{ pour tout } n\in\mathbb{N} \end{cases}$

a- construire sur l'axe des abscisses les termes u_0, u_1, u_2 et u_3 .

b- Que peut-on conjecturer concernant la convergence de la suite (u_n).

3) a- Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$; $u_n\geq 1$

b- Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c- En déduire alors que la suite (u_n) est convergent et déterminer sa limite

FIN