Lycée secondaire ALI BOURGUIBA		2010 - 2011
Épreuve : Mathématiques	Devoir de contrôle n° 1	Durée 2 h
Prof : MAATALLAH	Le 13 - 11 - 2010	Classe : 4 M_1

EXERCICE N 1 (5 points)

1/ Soit n un entier naturel non nul . Montrer que l'équation : $x^n + x^{n-1} \dots\dots\dots\dots\dots + x^2 + x - 1 = 0$ possède une unique solution dans $[\,0\ ,+\infty[$. On la note a_n .

2/ Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante . En déduire qu'elle converge .

3/ Montrer que , pour tout entier naturel $n \geq 2$: $a_n = \frac{1}{2} + \frac{{a_n}^{n+1}}{2}$.

4/ Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^{\,n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

EXERCICE N 2 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$. Soit $A(-i)$, $B(i)$ et $f(z) = \frac{iz-1}{z-i}$, $z\in \mathbb{C}\setminus\{i\}$

1/ Déterminer et tracer l'ensemble $\Gamma = \{\, M(z)\ / M \neq A , M \neq B \text{ et } f(z) \in \mathbb{R}_+^{\ *} \}$

2/ Soit $\omega \in \mathbb{C}\setminus\{i\}$ tel que $|\omega| = 1$ et $arg\,(\omega) \equiv \theta\ [2\pi]$, $\theta \in]0\,,\frac{\pi}{2}[$. Soit l'équation (E) : $\frac{iz-1}{z-i} = \omega$

a) Montrer que (E) possède une solution unique z qu'on exprimera en fonction de ω .

b) Mettre z sous forme exponentielle puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E') : $(z-i)^5 - i(z+i)^5 = 0$.

EXERCICE N 3 (5 points)

Dans le plan orienté $\mathcal{P}$ on considère un parallélogramme ABCD de centre O tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et $(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. On note I =D$*$ C et E le point tel que CED soit un triangle équilatéral direct .

1/ a) Montrer qu'il existe une unique rotation f telle que f(A)=E et f(B)=D .

b) Préciser l'angle de f puis vérifier que I est le centre de f et préciser l'image de la droite (CD) par .

2/ La droite (CE) coupe (AB) en F . Montrer que AEF est un triangle équilatéral et que f(F)=A .

3/ Pour tout point M du plan on considère les points $M_1 = R_{\left(A,\ \frac{\pi}{3}\right)}(M)$ et $M_2 = R_{\left(E,\ \frac{\pi}{3}\right)}(M)$ .Montrer que M_2 est l'image de M_1 par une translation dont on précisera le vecteur .

4/ On pose $\varphi = t_{\overrightarrow{BD}} \circ S_{(BC)}$, $g = t_{\overrightarrow{BA}} \circ S_{(BC)}$ et $h = g \circ S_{(BD)}$. Caractériser φ , g et h .

EXERCICE N4 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $[0\,,\frac{\pi}{4}\,[$ par : $f(x) = \frac{1}{1-\tan x}$.

1/ a) Montrer que f réalise une bijection de $[0\,,\frac{\pi}{4}\,[$ sur un intervalle K qu'on précisera .

b) Construire les courbes C_f de f et $C_{f^{-1}}$ de f^{-1} dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$.

c) Montrer que f^{-1} est dérivable sur K et vérifier que $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2x^2-2x+1}$.

2/ Soit g la fonction définie sur $[1\,,+\infty[$ par : $g(x) = f^{-1}\left(\frac{2x-1}{2x-2}\right)$ $si\ \ x > 1$ et $g(1) = \frac{\pi}{4}$.

a) Montrer que g est continue sur $[1\,,+\infty[$, dérivable sur $]1\,,+\infty[$ et que $g'(x) = -(f^{-1})'(x)$.

b) Montrer que $\forall x \in [1\,,+\infty[$ on a : $g(x) + f^{-1}(x) = \frac{\pi}{4}$

Bon Travail