Lycée ch -khaznadar Teboursouk Prof : Rakrouki .M	Devoir de Controle n°1	Classe : 4ème Math Durée : 180 minutes Date : 09/11/10

Une grande importance sera attachée à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation

EXERCICE1 (4pts) :

Cocher la réponse exacte :

1) La fonction $x \mapsto \sin(\pi x^2)$ est dérivable sur IR et sa fonction dérivée est :

$2x\cos(\pi x^2)$ ☐ , $2\pi x\sin(\pi x^2)$ ☐ , $2\pi x\cos(\pi x^2)$ ☐

2) Soit f une fonction dérivable sur IR telle que $f(3)=0$ *et* $f'(3)=2$ alors $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(\sqrt{x+6})}{x-3}$ est égal à :

$\frac{1}{3}$ ☐ , 2 ☐ , 0 ☐

3) Si $\frac{\pi}{6}$ est un argument de z alors un argument de $\frac{i}{\bar{z}^2}$ est :

$\frac{\pi}{6}$ ☐ , $-\frac{5\pi}{6}$ ☐ , $\frac{5\pi}{6}$ ☐

4) L'écriture exponentielle de $\frac{1}{i+tg(\alpha)}$ *où* $\alpha \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ est :

$\cos(\alpha)e^{i(\alpha-\frac{\pi}{2})}$ ☐ , $\cos(\alpha)e^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})}$ ☐ , $\sin(\alpha)e^{i(\alpha-\frac{\pi}{2})}$ ☐

5) Soit U une suite définie sur IN* et vérifiant $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $1-\frac{1}{n}\le U_n\le 1-\frac{1}{n+1}$ alors U est :

croissante ☐ , décroissante ☐ , ni croissante ni décroissante ☐

6) Soit U la suite définie sur IN* par $U_n=\underbrace{333.......3}_{n\ fois}+\frac{1}{3}$. Alors U est une suite géométrique de raison :

$\frac{1}{3}$ ☐ , 3 ☐ , 10 ☐

EXERCICE2 (5pts) :

Soit U la suite définie sur IN par : $U_0\in IR$ *et* $\forall n\in\mathbb{N}$, $U_{n+1}=\frac{1+U_n^2}{-1+U_n}$.

I) On suppose que $U_0>1$.

1)a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $U_n>1$ et que $U_{n+1}-U_n>1$.

b) Montrer que U n'est pas majorée et donner sa limite.

II) On pose $U_0=-\frac{1}{2}$.

1)a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $-1<U_n<0$.

b) Montrer que la suite U est décroissante puis déduire qu'elle est convergente et déterminer sa limite.

2) a) Montrer que $\forall n\in IN$, $U_{n+1}+1\le\frac{1}{2}(U_n+1)$ puis déduire que $\forall n\in IN$, $U_n+1\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

b) Retrouver alors la limite de la suite U.

3) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1}(U_k+1)$.

a) Montrer que la suite S est croissante. b) Montrer que la suite S est majorée par 1.

4) Soit V la suite définie sur IN par : $V_0=1$ *et* $\forall n\in\mathbb{N}$, $V_{n+1}=V_n+\sqrt{V_n^2-U_n}$.

a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $V_{n+1}-V_n\geq -U_n$ puis déduire que $\forall n\in\mathbb{N}$, $V_n\geq n-S_n+1$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} V_n$.

<u>EXERCICE3 (5pts) :</u>

Soit f la fonction définie sur $\left[0;\pi^2\right]$ $par:$ $f(x)=\cos(\sqrt{x})$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1)a)Vérifier que pour tout réel $x\in\left[0;\pi^2\right]$ $on\,a:$ $f(x)-1=-2\sin^2(\frac{\sqrt{x}}{2})$.

b) En déduire que f est dérivable en 0 et donner $f\,'(0)$.

2)a) Montrer que f est dérivable sur $\left[0;\pi^2\right]$ et calculer $f\,'(x)$.

b) Etudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variation sur $\left[0;\pi^2\right]$.

3)a) Résoudre dans $\left[0;\pi^2\right]$ l'équation $f(x)=0$.

b) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse $\frac{\pi^2}{4}$.

c) Tracer T et C_f.

4) Soit φ_n la fonction définie sur $[0;1]$ par $\varphi_n(x)=f(x)-x^n$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

a) Montrer qu'il existe un unique $a_n\in\left]0;1\right[$ tel que $\varphi_n(a_n)=0$.

b) En déduire que la suite (a_n) est croissante.

<u>EXERCICE4 (6pts) :</u>

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit A le point d'affixe $-1+i$ et θ un réel de l'intervalle $\left]-\frac{3\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$. On considère l'équation $(E):z^2-2iz-1-ie^{i2\theta}=0$. On désigne par z_1 et z_2 les solutions de (E).

1)a) Déterminer la valeur de θ pour que $z_0=1+i$ soit une solution de (E).

b) Résoudre l'équation (E) pour la valeur de θ trouvée.

2) Montrer, sans résoudre (E) , que $\arg(z_1)+\arg(z_2)\equiv\theta+\frac{5\pi}{4}[2\pi]$.

3) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). b) Ecrire les solutions sous formes exponentielles.

4) On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $i+e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}$ et $i-e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}$.

a) Montrer que M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à un point fixe J que l'on précisera.

b) Déterminer et construire l'ensemble des points M_1 lorsque θ varie dans $\left]-\frac{3\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$. En déduire l'ensemble des points M_2.

5) Soit f l'application du plan $P\setminus\{A\}$ dans le plan P qui à tout point $M(z)$ associe $M'(z')$ tel que $z'=\frac{z^2}{z+1-i}$.

a) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

b) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que z' est imaginaire pur.

c) Montrer que pour tout point M de $P\setminus\{A\}$ on a : $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'})\equiv(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO})[2\pi]$. En déduire l'ensemble des points M tels que O , M et M ' soient alignés.

<u>BON TRAVAIL</u>