Exercice N°1 (4 point)

Soit P un nombre complexe de module 1

On considère l'équation : (Ep) : $z^2 - 2\,p^2\,z - 1 = 0$

1- déterminer le nombre complexe p pour que (Ep.) admette une racine double.

2- Soient z_1 et z_2 les racines de (Ep.).On pose :

$u_1 = \frac{(1+z_1)}{p}$ et $u_2 = \frac{(1+z_2)}{p}$

a) Calculer $u_1 + u_2$ et $u_1 . u_2$

b) Montrer que Si u_1 et u_2 ne sont pas des réels alors $|1+z_1| = |1+z_2|$

c) Montrer que Si u_1 et u_2 sont des réels alors arg $(1+z_1) \equiv$ arg $(1+z_2)[2\pi]$.

Exercice N°2 (4 point)

On considère la suite U_n définie par :

$U_0 = 1$ et $U_{n+1} = U_n + 1 + \frac{2}{U_n}$ ou $n \in \mathbb{N}$.

1- Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, U_n \geq 1$

2- Monter que $(U_n)_n$ est une suite croissante.

3- a) établir que : pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a : $1 \leq u_{n+1} - u_n \leq 3$

b) monter par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}$,
on a : $n+1 \leq U_n \leq 3n+1$.

4- Calculer la limite de (U_n)

5- On pose : pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$V_n = \frac{(-1)^0}{U_0} + \frac{(-1)^1}{U_1} + \frac{(-1)^2}{U_2} + \dots\dots\dots + \frac{(-1)^{2n}}{U_{2n}} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{U_k} \text{ et } Wn = Vn - \frac{1}{U_{2n+1}}$$

a) Monter que (V_n) et (w_n) sont deux suites adjacentes.

b) Donner un encadrement de L $= \lim_{n \to \infty} V_n$.

Exercice N°3 (6 point)

Soit f l'application du plan P vers P définie par :

Pour tout M(Z) on associe $M^{1}(z)$ tel que :

$z = e^{ix}z + 1 - e^{ix}$ avec $x \in]-\pi;\pi]$

$(0,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ un R.O.N.D du plan.

1- a) monter que f est une rotation dont on précisera l'angle et le centre …….

c) Déterminer la valeur de x pour laquelle : f transforme : A'(-1) en A''(1-2i).

2- Dans la suite de l'exercice on suppose que : z = iz +1-i.

a) Montrer que : $(E_1)\, z^3 + 1 = 0$ $\quad (E_2)\, Z^3 + 3(-1+i)Z^2 - 6iz + 2 + i = 0$

b) Resoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_1)^3 + 1 = 0$ et plater les points images $M_1\, M_2$; M_3 les solution dans le plan complexe , puis résoudre l'équation

c) En déduire que les points images des solutions de l'équation (E_2) sont $f(M_1)$; $f(M_2)$ et $f(M_3)$ et que A ; $f(M_1)$; $f(M_2)$; $f(M_3)$ sont situés sur le même cercle.

Exercice N°4 (6 point)

Soient α et β deux réels positifs de somme non nulle.

On note (U_n) la suite réelle définie par :

$U_0 = \alpha$; $U_1 = \beta$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_{n+2} = \sqrt{U_{n+1}} + \sqrt{U_n}$

1) Quelles sont les limites éventuelle de (U_n) ?

2) Monter que si , à partir d'un rang n_0, $U_n \leq 1$ alors la suite (U_n) est croissante à partir de le rang.

3) En déduire que : 0 ne peut pas être une limite de (U_n)

4) Justifier qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $U_p \geq 1$ et montrer que $n \geq p$; $U_n \geq 1$

5) On veut montrer que (U_n) converge vers 4 .

a) Montrer qu'il suffit de montrer que la suite $\sqrt{U_n}$ converge vers 2.

b) On pose alors : pour tout $n \in \mathbb{N}$;

$$z_n = \left|\sqrt{u_n} - 2\right|$$

Montrer que : $n \geq p$; $z_{n+2} \leq \frac{1}{3}(z_{n+1} + z_n)$

c) On pose : a= $\frac{1-\sqrt{13}}{6}$ et on considère la suite (x_n) définie par : $n \in \mathbb{N}$;

$x_n = z_{n+1} - a\, z_n$.

Montrer que : $n \geq p$; $0 \leq x_{n+1} \leq \left(\frac{1}{3} - a\right) x_n$ puis que (x_n) tend vers 0

d) Justifier alors que (z_n) tend vers 0 elle aussi et conclure.