Lycée :Otman chatti M'saken	DEVOIR DE CONTROLE N°1	*Année Scolaire* : **2010-2011**
Prof : Salah mohsen		*Classe :4^{ième} Sc*
MATHEMATIQUES		*Durée : 2heures*

Exercice 1 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par* $\begin{cases} f(x) = 1 + \dfrac{1-\cos x}{x^2} & si \ x \in]-\infty, 0[\\ f(x) = 2x + \sqrt{x^2 + \left(\dfrac{9}{4}\right)} & si \ x \in [0, +\infty[\end{cases}$

1. a) Montrer que pour tout $x < 0$ *on a* $0 \le f(x) - 1 \le \dfrac{2}{x^2}$

b) En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

2. a)Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x)$

b) Etudier la continuité de f en 0

3. a) Justifier la continuité de f sur $[0, +\infty[$

b) Montrer que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$

c) Déterminer $f([0,2])$ *,en déduire que l équation* $2f(x) - 7 = 0$ *admet une unique solution* $\alpha \in [0,2]$

Exercice 2 :

Soient les deux suites (u_n) *et* (v_n) *définies sur IN par :*

$$\begin{cases} u_0 = 1 \quad \text{et} \quad v_0 = 2 \\ \text{pour tou n de IN, } u_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1. a) Montrer que pour tout $n \in IN$ *on a: :* $u_n > 0$ *et* $v_n > 0$.

b) Démontrer que l'on a : Pour tout n de IN ; $u_n < v_n$.

2. a) Montrer que la suite (u_n) *est croissante et que la suite* (v_n) *est décroissante*

b) En déduire que (u_n) *et* (v_n) *sont convergentes. On posera :* $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ *et* $\ell' = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

3. On considère la suite (w_n) *définie sur IN par* $w_n = v_n - u_n$.

a) Montrer que pour tout n de IN ; $w_{n+1} \le \dfrac{1}{2} w_n$.

b) En déduire que pour tout n de IN ; $w_n \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

c) En déduire que $\ell = \ell'$.

4. a) Montrer que pour tout n de IN ; $u_n . v_n = 2$.

b En déduire la valeur de ℓ

Exercice 3:

1. *Soit z le nombre complexe de module* $\sqrt{3}-1$ *et d'argument* $\frac{\pi}{3}$.

a) Donner la forme cartésienne de z .

b) Vérifier que : 1-z = $\frac{1}{2}(3-\sqrt{3})(1-i)$.

c) Calculer le module et un argument de 1-z .

2. *a) Représenter dans le plan complexe les points A ; B et C d'affixes respectives : 1 , z , 1-z*

b) Quelle est la nature du quadrilatère OBAC ?

3. *Soit* $S = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5$.

a) Vérifier que $S(1-z) = 1-z^6$,

b) En déduire un argument de S.

Exercice 4 :

Le plan orienté est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{U},\vec{V})$. *A tout point M d'affixe* $z \neq -i$ *, on associe le point M' d'affixe :* $z' = \frac{z+2i}{1-iz}$ *et soient les points B et C d'affixes respectives -i et -2i .*

1. a) Vérifier que pour $z \neq -i$ *on à :* $-iz' = \frac{z+2i}{z+i}$

b) En déduire l'ensemble des points M tels que z' soit réel

2. a)Montrer que : $|z'| = \frac{CM}{BM}$

b) En déduire l'ensemble des points M lorsque M' varie sur le cercle trigonométrique.

3. Soit le nombre complexe : $W = \frac{z'-i}{z-i}$; $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i,i\}$

a) Vérifier que pour tout nombre complexe z on à $(z-i)(1-iz) = -i(z^2+1)$.

b) En déduire que $W = \frac{-1}{z^2+1}$.

4. On pose $z = e^{i\theta}$; $\theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

a) Vérifier que $W = \frac{-e^{-i\theta}}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}$

b) En déduire en fonction de θ *le module et un argument de W.*