I. Nuage de points

1. Introduction

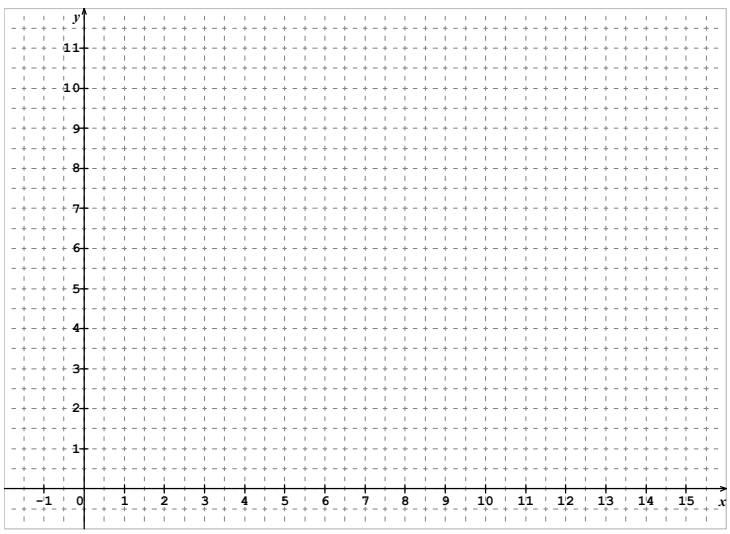
Une série statistique à deux variables, X et Y, est le résultat de l'observation des deux caractères X et Y pour chaque individu d'une population.
Lorsque les caractères sont quantitatifs , on peut associer, à chaque individu i, un couple de nombres réels noté (x_i, y_i).

Exemple :

Le tableau suivant donne, en millions de dinars, le chiffre d'affaires x_i et la somme consacrée aux dépenses de publicité y_i pour cinq entreprises :

Entreprises	x_i	y_i
A	30	3
B	55	4,5
C	60	7
E	20	1,5
F	50	4

Placer les points $M_i(x_i, y_i)$ dans le repère orthogonal ci – dessous :



2. Définition

Dans un repère orthogonal du plan, le nuage de points associés à la série statistique à deux variables, X et Y, est l'ensemble des points M_i de coordonnées (x_i, y_i) représentatifs de tous les individus i de la population.

3. Point moyen

On note X le caractère : « le chiffre d'affaires de chaque entreprise » et Y : « les dépenses de publicité ».
Calculer la moyenne, la variance et l'écart – type de chaque caractère.
On rappelle que :

$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1} n_i x_i$, $V(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1} n_i \left(x_i - \overline{X}\right)^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1} n_i x_i{}^2 - \overline{X}^2$ et $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

. $x_1, x_2, ..., x_N$ désignent les valeurs distinctes prises par la variable X si elle est discrète , ou les centres des classes si la variable X est continue

. N est la taille de l'échantillon

. Dans notre exemple $n_i = 1$, pour tout $1 \le i \le N$

Entreprises	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
A	30	3			
B	55	4,5			
C	60	7			
E	20	1,5			
F	50	4			
Somme					

$\overline{X} = \ldots\ldots\ldots\ldots$; $V(X) = \ldots\ldots\ldots\ldots$; $\sigma(X) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\overline{Y} = \ldots\ldots\ldots\ldots$; $V(Y) = \ldots\ldots\ldots\ldots$; $\sigma(Y) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Définition

Le point $G\left(\overline{X}, \overline{Y}\right)$ est appelé point moyen du nuage de points associé à la série statistique à deux variables X et Y.

Exemple : Placer le point moyen G dans le repère précédent.

II. Liaison entre deux caractères – Méthode d'ajustement par les moindres carrés

1. Droite d'ajustement

Lorsque le nuage a tendance de s'accumuler autour d'une droite, alors on cherche une équation de la droite D qui approche le « mieux possible » les points du nuage, c'est ce qu'on appelle un ajustement linéaire.
Cet ajustement est liée à deux paramètres appelés *Covariance* et *Coefficient de corrélation linéaire.*

2. Covariance

Définition

Soit (X,Y) une série statistique double à caractères quantitatifs donnés par des observations individuelles $\left(x_i, y_i\right)$ où $1 \le i \le n$, n étant l'effectif de la population observée.

On appelle covariance de (X,Y) le réel noté $\text{cov}(X,Y)$ défini par : $\text{cov}(X,Y) = \frac{1}{N}\sum_i \left(x_i - \overline{x}\right)\left(y_i - \overline{y}\right)$ ou encore $\text{cov}(X,Y) = \frac{1}{N}\sum_i x_i y_i - \overline{x}\ \overline{y}$.

Remarque

Comme pour le calcul de la variance, la formule $\text{cov}(X,Y) = \frac{1}{N}\sum_i x_i y_i - \overline{x}\ \overline{y}$ est souvent la plus simple à utiliser pour les calculs.

Exemple

La covariance de la série statistique ci – dessus est :

……..

Propriétés

- $\text{cov}(X,Y) = \text{cov}(Y,X)$.
- $\text{cov}(X,X) = V(X)$.
- $\text{cov}^2(X,Y) \le V(X)\cdot V(Y) \Rightarrow |\text{cov}(X,Y)| \le \sigma(X)\cdot\sigma(Y)$.

Avec la calculatrice :

Pour programmer le tableau statistique de la page 1 :

. Choisir le mode de fonctionnement de statistique à deux variables

MODE 3 Stat 1

. Entrer les couples x_i STO y_j M+

. Pour obtenir par exemple la moyenne $\overline{X}$ appuyez sur RCL $\overline{X}$

3. Coefficient de corrélation linéaire

Définition

Le coefficient de corrélation linéaire entre deux variables, X et Y, est le nombre r défini par : $r = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}$.

Propriétés

- $|\text{cov}(X,Y)| \le \sigma(X)\cdot\sigma(Y) \Rightarrow 0 \le \dfrac{|\text{cov}(X,Y)|}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)} \le 1 \Rightarrow \boxed{-1 \le r \le 1}$
- Les points du nuage sont alignés si et seulement si $r = 1$ ou $r = -1$.
- Si $|r| \ge \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ alors la corrélation linéaire entre X et Y est forte. On peut trouver une droite approximative liant X et Y.
- Si $|r| < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ alors la corrélation linéaire entre X et Y est faible. Il est inutile de chercher à exprimer Y comme fonction affine de X mais il peut exister d'autres types de relations.

Exemple

Le coefficient de corrélation linéaire est r = ……..

On en déduit que : …….

……

4. Droites de régression

Soient X et Y deux séries statistiques quantitatives non constantes et observées dans une population donnée.

On suppose que le coefficient de corrélation r vérifie : $|r| \ge \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ alors il est possible d'approcher la liaison entre X et Y par une relation affine de type Y en fonction de X ou aussi X en fonction de Y.

- La première droite est appelée droite de régression de Y en X, elle a pour équation : $D : y = ax + b$ où $a = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{V(X)}$ et $b = \overline{Y} - a\overline{X}$.
- La deuxième droite est appelée droite de régression de X en Y, elle a pour équation : $D' : x = a'y + b'$ où $a' = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{V(Y)}$ et $b' = \overline{X} - a'\overline{Y}$.
- Ces deux droites affines passent par le point $G(\overline{x},\overline{y})$.

Exemple

1) Donner une équation de chacune des droites D et D'.

$a =$ …………………………………… ; $b =$ ……………………………………

$D:$ ……………………………………

$a' =$ …………………………………… ; $b' =$ ……………………………………

$D':$ ……………………………………

2) Tracer D et D' dans le même repère R.

3) Quelle estimation peut on faire quant à la somme consacrée aux dépenses de publicité pour une entreprise ayant un chiffre d'affaire égal à 200 millions de dinars

……

……………………………………………………

Exercice

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la dette des pays du tiers-monde entre 1978 et 1992 (en milliards de dollars).

Année	1978	1982	1986	1990	1992
Rang de l'année x_i	0	4	8	12	14
Dette y_i	383	753	1089	1346	1510

Source : Banque mondiale, FMI, 1993.

1. Le plan est rapporté à un repère orthogonal. Représenter le nuage de points (x_i, y_i), et le point moyen G de cette série.
2. a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de cette série double.
   Un ajustement affine peut il être envisagé ? Pourquoi ?
   b) Ecrire une équation de la droite de régression D de Y en X. Tracer D.
   c) Estimer, à 1 milliard de dollars prés, le montant prévisible de la dette des pays du tiers – monde en 2010.

Remarque : il existe une autre méthode d'ajustement dite méthode de Mayer

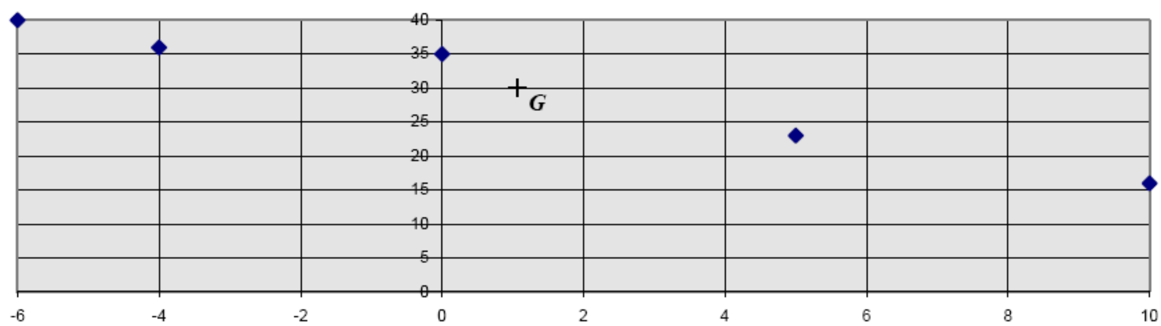
(Voir paragraphe du livre page (106 Sc) ou page (217 Maths))

Exercice :

Le tableau ci-dessous donne la consommation quotidienne Y en fuel d'une chaudière (en litres) en fonction des relevés de température extérieure X

X (en degré C)	$x_1 = -6$	$x_2 = -4$	$x_3 = 0$	$x_4 = 5$	$x_5 = 10$
Y (en litres)	$y_1 = 40$	$y_2 = 36$	$y_3 = 35$	$y_4 = 23$	$y_5 = 16$

On a représenté le nuage de points



1) Déterminer un ajustement affine de Y en X par la méthode de Mayer

……

……

……

……………………………………………………………………………………

………

……
……..

2) Retrouver cet ajustement par la méthode des moindres carrés

……
……
……
……

3) A quelle température, la consommation en fuel dépassera elle 100 litres par jour

……
……
……

III. Distributions marginales

1. Construction d'un tableau à double entrée :

Activité

Dans une population de 50 ménages on a observé les deux caractères quantitatifs discrets suivants :

X nombre d'enfants dans chaque ménage

Y nombre de pièces du logement habité par chaque ménage

Les résultats de ces observations sont consignés dans les tableaux suivants :

Numéro du ménage	Nombre D'enfants	Nombre De pièces
1	0	1
2	3	3
3	0	2
4	3	2
5	1	1
6	3	3
7	2	2
8	1	2
9	4	2
10	3	2
11	2	1
12	1	4
13	1	2
14	1	3
15	0	1
16	3	3
17	2	2
18	2	3
19	0	2
20	1	2
21	2	3
22	2	2
23	4	3
24	1	2
25	2	3

Numéro du ménage	Nombre D'enfants	Nombre De pièces
26	4	4
27	2	2
28	2	4
29	2	3
30	3	3
31	1	1
32	1	3
33	4	3
34	2	3
35	2	2
36	3	4
37	0	1
38	4	4
39	0	3
40	4	4
41	2	3
42	3	3
43	5	4
44	1	2
45	3	4
46	5	3
47	2	3
48	2	4
49	3	2
50	2	3

1) Quelles sont les valeurs prises par X et par Y

……..
……..

2) Les données présentées dans le tableau précédent étant nombreuses , on se propose, dans la suite , de les présenter sous une forme plus réduite et à l'aide d'un tableau à double entrée . Compléter le tableau suivant :

Tableau à double entrée (tableau des effectifs) :

Y / X	1	2	3	4	Total
0	3	2	1	0	6
1	2				
2	1				
3	0				
4	0				
5	0				
Total	6				50

Pour $(1 \le i \le 6)$ et $(1 \le j \le 4)$, on a associé au couple (x_i, y_j) un nombre appelé effectif que l'on note n_{ij}.

Exemple : l'effectif correspondant au couple $(x_4, y_2) = (3,2)$ est $n_{42} = 3$.

Il indique le nombre de ménages ayant 3 enfants et un logement de 2 pièces.

Définition :

- n_{ij} est appelé effectif associé au couple (x_i, y_j).

2. Distributions marginales :

Du tableau précédent, on peut extraire deux séries statistiques à une variable. La première donne la répartition de 50 ménages selon le nombre d'enfants X dans chaque ménage et la seconde donne la répartition de 50 ménages selon le nombre de pièces Y du logement habité par chaque ménage.

On obtient alors les deux tableaux suivants :

Tableau 1 :

N^{bre} d'enfants X	0	1	2	3	4	5	Total
Effectif n_i des ménages	6	10	16	10	6	2	50

Tableau 2 :

N^{bre} de pièces Y	1	2	3	4	Total
Effectif n_j des ménages	6	16	19	9	50

Chacun des tableaux 1 et 2 définit une série statistique à une variable, appelée *distribution marginale.*

- Calculer $\overline{X}$ et $\overline{Y}$, donner le point moyen G :

  ……
  ……
  ……
  ……
  ……
  ……

- Calculer $V(X)$, $V(Y)$, $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$:

  ……
  ……
  ……
  ……
  ……
  ……
  ……

- La covariance de cette série est :

$$\boxed{\text{cov}(X,Y)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}n_{ij}\left(x_i-\overline{X}\right)\left(y_j-\overline{Y}\right)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}n_{ij}x_iy_j-\overline{X}\ \overline{Y}}.$$

$$\Rightarrow \text{cov}(X,Y)=\frac{1}{50}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{4}n_{ij}x_iy_j-\overline{X}\overline{Y}$$

Cette formule parait compliquée, pour cela on considère le tableau suivant qui nous facilite la tache

X \ Y	1	2	3	4	Totaux
0	3	2	1	0	
1	2	5	2	1	
2	1	5	8	2	
3	0	3	5	2	
4	0	1	2	3	
5	0	0	1	1	
Totaux					

……
……
……
……

- Calculer le coefficient de corrélation linéaire ; que peut – on remarquer ?

  ……
  ……

Avec la calculatrice :

Pour programmer le tableau statistique à double entrée :

. Choisir le mode de fonctionnement de statistique à deux variables [MODE] [3] [Stat] [1]

. Entrer les triplets [x_i] [STO] [y_j] [STO] [n_{ij}] [M+]

. Pour obtenir par exemple la moyenne $\bar{X}$ appuyez sur [RCL] [$\bar{X}$]

Exercice :

Le tableau suivant donne la répartition de 800 agriculteurs suivant les deux variables statistiques suivantes :
X : superficie de l'exploitation agricole (en ha)
Y : âge de l'agriculteur

X \ Y	$[20,30[$	$[30,40[$	$[40,50[$	$[50,60[$	60 ans et plus
$]0,5[$	15	50	90	80	25
$[5,15[$	10	45	60	50	20
$[15,25[$	8	30	40	35	12
$[25,35[$	6	40	35	25	9
$[35,45[$	7	20	15	20	8
45 et plus	4	15	10	10	6

1) Déterminer les distributions marginales de X et Y
2) Calculer $\overline{X}$, $\overline{Y}$, V(X) , V(Y) , σ_X et σ_Y
3) Calculer cov(X,Y) et le coefficient de corrélation du couple (X,Y). Peut on envisager un ajustement affine liant X et Y ?

Cas d'un ajustement non affine :

Activité

On a mesuré, entre 1989 et 1974, l'effet de la population sur une population piscicole d'une rivière
Les résultats présentés dans le tableau suivant donnent une estimation du nombre y_i de poissons, exprimé en milliers, correspondant à l'année dont le rang est x_i

Année	1989	1990	1991	1992	1993	1994
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	591,3	106,7	96,5	63,2	21	9,4

1) On considère la série statistique double (x_i, y_i). Calculer le coefficient de corrélation entre x et y. Expliquer pourquoi un ajustement linéaire ne paraît pas bien adapté
2) On pose : $z_i = \text{Log}\, y_i$, pour $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
   a) Calculer les nombres z_i
   b) Représenter dans un repère orthogonal le nuage de points (x_i, z_i)
c) Calculer le coefficient de corrélation de cette série. Justifier l'utilisation d'un ajustement affine pour la série (x_i, z_i)
d) Déterminer l'équation de la droite de régression de z en x. Tracer cette droite dans le repère de la question 2) b)
3) On suppose que l'évolution de cette population se poursuit sur le même modèle
   a) A partir de quelle année, cette population sera-t-elle strictement inférieure à 1000 ?
   b) Donner une estimation de la population de cette rivière en l'an 2010.

Statistiques à deux variables
Exercices

Exercice n°1 :

Le tableau suivant donne la répartition de cent anciens élèves d'un établissement d'après les deux caractère : X le nombre d'années passées dans cet établissement et Yson âge

Y \ X	2	3	4
20	0	8	30
25	5	20	7
30	25	3	2

1) a) Donner les distributions marginales de X et Y

b) Calculer : $\overline{X}, \overline{Y}, \sigma(X)$ et $\sigma(Y)$

2) Calculer la covariance et le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y, et interpréter le résultat obtenu

3) a) Déterminer la droite de régression de Y en X

b) Donner une estimation de l'âge d'un élève qui a passé 5 ans dans cet établissement

Exercice n°2 :

Les mesures relatives à la vitesse d'un automobiliste et la distance nécessaire pour arrêter le véhicule sont réunies dans le tableau suivant .

x_i (Km / h)	27	43	62	80	98	115
y_i (distance d'arrêt en m)	6,8	20,5	35,9	67,8	101,2	135,8

1) Dans un repère orthogonal , construire le nuage des points associés à la série statistique (x_i , y_i).

2) a) Calculez $\overline{x}$, $\overline{y}$, $V(X)$, $V(Y)$ et $\text{cov}(X,Y)$.

b) Calculez le coefficient de corrélation linéaire .

c) Déterminez et tracez la droite de régression de y en x .

d) Déduire la valeur estimée de x correspondante à une distance d'arrêt de 180 m .

e) Quelle est la distance d'arrêt en mètre , correspondante à une vitesse de 150 Km / h ?

Exercice n°3 :

L'étude de la population d'une ville a donné les résultas suivants : h est le nombre d'habitants par milliers.

Année	2001	2002	2003	2004	2005
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5
Nombre d'habitants h_i	24,5	27,38	31,205	36,125	37,845

1. Représenter dans un repère orthonormé le nuage de points de la série (x , h) dans un repère orthogonal $R(O,\vec{i},\vec{j})$. Sur l'axe des abscisses placer 0 à l'origine 1 cm représente 1
Sur l'axe des ordonnées placer 20 à l'origine 1 cm représente mille

2. a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et h

b) Justifier l'utilisation d'un ajustement affine pour la série (x , h)

c) Déterminer l'équation de la droite de régression de h en x

3. On suppose que l'évolution de cette population se poursuit sur le même modèle et que les dépenses de la municipalité de cette ville en une année en milliers des dinars noté y obéit à la loi : $y = 10\sqrt{h_i} + 200$

a) Donner une estimation de la population de cette ville à l'année 2010 ?

b) Donner une estimation des dépenses de cette municipalité à l'année 2010

c) A partir de quelle année les dépenses de cette municipalité dépasseront-elles les 300 milles dinars.

Exercice n°4 :

Pour une série (x_i, y_i) avec $(1 \le i \le 15)$ à deux variables , la méthode des moindres carrés a permit de trouver : L'équation d la droite (D) de régression de y par rapport à x. $D : y = 0,37x + 12,59$

L'équation de la droite (D') de régression de x par rapport à y . $D' : x = 0,9y + 14,07$

1. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de cette série
2. Déterminer les coordonnées du point moyen G associé à cette série
3. On suppose que $\sum_{i=1}^{15} x_i^2 = 25205$. Calculer : Cov (x , y) ; $\sum_{i=1}^{15} x_i y_i$ et $\sum_{i=1}^{15} y_i^2$

Exercice n°5 :

Le tableau suivant donne les résultats obtenus à partir de six essais de laboratoire concernant la charge de rupture d'un acier en fonction de sa teneur en carbone

Teneur en carbone X (pour 10000)	60	62	64	68	70	74
Charge de rupture Y (en Kg)	70	75	80	82	85	100

1. a) Représenter dans un repère orthogonal le nuage des points de la série (X, Y)
   b) Déterminer le point moyen de ce nuage
2. a) Calculer $V(X)$; $V(Y)$ et $COV(X, Y)$
   b) Est il possible d'envisager un ajustement linéaire entre X et Y ? Justifier
   c) Déterminer et construire la droite de régression de Y en X
3. Quelle pourrait être la charge de rupture d'un acier ayant une teneur en carbone de 90 pour 10000