I. Définition :

Une isométrie du plan est une application qui ***conserve les distances*** .
(f : P → P est une isométrie) ⇔ (∀ (M,N) ∈ P^2, on a : d(f(M),f(N)) = MN).

Exemples :

- Une symétrie orthogonale
  …………………………………………………………………………………………………
- Une translation
  ………
- Une rotation
  …….
- Une homothétie
  ………

N. B :

- $id_P = t_{\vec{0}} = r_{(\Omega,\ 2k\pi)}$ est une isométrie.
- $S_\Omega = r_{(\Omega,\pi)}$ est une isométrie.

Conséquences :

1. Soit f une isométrie du plan.
   Si A et B sont deux points du plan tels que A ≠ B alors f(A) ≠ f(B).
   ……
   ……………..
2. La composée de deux isométries du plan est une isométrie.

Exercice :

P est le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit f : P → P, M(z) → M'(z')/ z' = i $\bar{z}$ +1 – i. Montrer que f est une isométrie du plan.

II. Propriétés :

1. Isométrie et produit scalaire :

Théorème :

Soit f une application du plan.
(f est une isométrie du plan) si et seulement si (pour tous points A, B et C du plan d'images respectives

par f A', B' et C', on a : $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$)

On dit qu'une isométrie ***conserve le produit scalaire***.

Déms

$\Rightarrow$) f est une isométrie telle que : f(A) = A', f(B) = B' et f(C) = C'.

B'C' = BC $\Leftrightarrow$ $B'C'^2 = BC^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{B'C'}^2 = \overrightarrow{BC}^2$

$\Leftrightarrow$...

....

Inversement : Si f est une application qui conserve le produit scalaire.

f(A) = A', f(B) = B' et f(C) = C' tels que : $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ (1)

Soient M et N deux points du plan tels que : f(M) = M' et f(N) = N'

Dans (1), on prend A = M, B = N et C = N.

....

....

2. Isométrie et relations vectorielles :

Théorème :

Soit f une **isométrie** du plan.

A, B et C trois points d'images respectives par f A', B' et C'.

$\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{A'C'} = \alpha\overrightarrow{A'B'}$

Déms :

$\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} - \alpha\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AC} - \alpha\overrightarrow{AB})^2 = 0 \Leftrightarrow$

....

....

....

....

Conséquences :

- Les images de trois points alignés par une isométrie sont trois points alignés.
  Toute isométrie
  ....
- Les images de trois points non alignés par une isométrie sont trois points non alignés.
- Si f est une isométrie et I = A ∗ B alors f(I) = f(A) ∗ f(B).

$I = A * B \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow$

……………………………………………………………………………………………………

- Une isométrie conserve le barycentre. $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{A'G'} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{A'B'}$
- Une isométrie *conserve l'équipollence*.
  A, B, C et D sont quatre points d'images respectives A', B', C' et D'.
  Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$.
  En effet : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow$ (A, B) éq (C, D) $\Leftrightarrow A * D = B * C \Leftrightarrow$
  ……………………………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………………………
  Rq : L'image d'un parallélogramme par une isométrie est un parallélogramme.
- Une isométrie conserve les relations vectorielles.
  A, B, C, D, E et F six points d'images respectives par f A', B', C', D', E' et F'.
  Si $\overrightarrow{EF} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\,\overrightarrow{CD}$ alors $\overrightarrow{E'F'} = \alpha\overrightarrow{A'B'} + \beta\,\overrightarrow{C'D'}$.
- Une isométrie conserve le centre de gravité d'un triangle.
  $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ alors $\overrightarrow{A'G'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A'B'} + \frac{1}{3}\overrightarrow{A'C'}$

3. Détermination d'une isométrie :

Soit f une isométrie du plan.
A, B et C sont trois points non alignés d'images respectives par f A', B' et C'.
R= $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ et R' = $(A',\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'})$ sont deux repères cartésiens du plan.
Pour tout point M du plan, il existe un couple unique $(x, y) \in IR^2$ tel que $\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$
Soit M' = f(M) alors M' est le point défini par $\overrightarrow{A'M'} = x\,\overrightarrow{A'B'} + y\,\overrightarrow{A'C'} \Rightarrow M'\,(x, y)_{R'}$.
Ainsi : une isométrie est entièrement déterminée par la donnée de trois points non alignés et leurs images.

Conséquences :
Soient f et g deux isométries du plan.
A, B et C sont trois points non alignés.
(f = g) $\Leftrightarrow$ (f(A) = g(A) , f(B) = g(B) , f(C) = g(C)).

4. Réciproque d'une isométrie :

Théorème :

Une isométrie du plan est une bijection, sa réciproque f^{-1} est une isométrie du plan.

Déms :

A, B et C sont trois points non alignés d'images respectives A', B' et C' par f.
R= $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ et R' = $(A',\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'})$ sont deux repères cartésiens du plan.

- Soit N un point du plan, existe t – il un point M du plan tel que f(M) = N ?
  $N \in P \Leftrightarrow$ il existe $(\alpha, \beta) \in IR^2$ tel que $\overrightarrow{A'N} = \alpha\,\overrightarrow{A'B'} + \beta\,\overrightarrow{A'C'}$

Soit M $\in$ P tel que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} \Rightarrow$

$\overrightarrow{A'f(M)} =$………

………

………

- M est – il unique ?
  Supposons qu'il existe un autre point M_1 tel que $f(M_1) = N$.
  $d(f(M), f(M_1)) = MM_1 \Rightarrow MM_1 = 0 \Rightarrow M = M_1$
  Ainsi f est une bijection.
- Montrons que f^{-1} est une isométrie.
  $\forall$ (M, N) $\in P^2$, posons $M_1 = f^{-1}(M)$ et $N_1 = f^{-1}(N) \Rightarrow f(M_1) =$ ………. et $f(N_1) =$ ……….
  $M_1 N_1 =$ ………. $\Rightarrow MN = d(f^{-1}(M), f^{-1}(N)) \Rightarrow f^{-1}$ est une isométrie.

5. Images de quelques parties du plan :

Soit f une isométrie du plan.
(A, B) $\in$ P x P, $A \neq B$; A' = f(A) et B' = f(B).
Soit M $\in$ P et M' = f(M).

- M $\in$[AB] $\Leftrightarrow$ AM + MB = AB $\Leftrightarrow$
  ……………………………………………………………………………………………………
  f([AB]) = …………………
- M $\in$(AB) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow$
  ……………………………………………………………………………………………………..
  f((AB)) = …………………
- M $\in$[AB) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}$, $\alpha \geq 0 \Leftrightarrow$
  …………………………………………………………………………………………..
  f([AB)) = …………………
- M $\in \zeta_{(I,r)} \Leftrightarrow$
  ………
  ……….
  f($\zeta_{(I,r)}$) = ……………………………………..
- Les images de deux droites perpendiculaires sont
  ……………………………………………………………………
  Les images de deux droites parallèles sont
  ………………………………………………………………………………
- Une isométrie transforme un cercle (C) et une droite Δ tangente à (C) en M, en un cercle (C') et une droite Δ' tangente à (C') en M' = f(M).
  On dit qu'une isométrie *conserve le contact*.

III. Isométrie et points invariants :

Introduction :

Soit f une application du plan.

- Un point M est invariant par f signifie f(M) = M.
- Soit E une partie non vide de P.
  - (La partie E est invariante point par point par f) signifie ($\forall$ M $\in$ E, f(M) = M).
  - (La partie E est globalement invariante par f) signifie (($\forall$ M $\in$ E, f(M)$\in$ E).
- Cas d'une isométrie

  Soit f une isométrie du plan.

  On désigne par Inv(f) l'ensemble des points invariants par f, c . a . d

  Inv(f) = $\{$M $\in$ P / f(M) = M$\}$. On peut avoir :

  Inv(f) = $\varnothing$, c'est l'exemple

  ……………………………………………………………………………………………………

  Inv (f) = $\{$I$\}$ c'est l'exemple

  …………………………………………………………………………………………………..

  Inv(f) = Δ c'est l'exemple

  ………………………………………………………………………………………………........

  Inv(f) = P si et seulement si

  ………………………………………………………………………………………………..

Théorème n°1 :

Si une isométrie f fixe deux points distincts A et B alors f fixe tout point de la droite (AB).

C . a . d si f(A) = A et f(B) = B alors $\forall$ M $\in$ (AB), f(M) = M.

Déms:

M $\in$ (AB) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM} = \alpha\,\overrightarrow{AB}$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{f(A)f(M)}$ = ………………… $\Leftrightarrow$ ……………………………………………

$\Leftrightarrow$ f(M) = M.

Théorème n°2 :

Si une isométrie f laisse fixe trois points non alignés alors f = id_P.

Déms :

f et l'identité sont deux isométries qui coincident sur trois points non alignés donc f et l'identité coincident sur tout le plan.

Théorème n°3 :

Soit f une isométrie du plan distincte de l'identité et soit A un point du plan tel que

f(A) = A' et A $\neq$ A'.

Si M est invariant par f alors M $\in$ méd [AA'].

Déms :

f(M) =M et f(A) =A' alors

……

Théorème n°4 :

Si une isométrie f distincte de l'identité laisse fixe deux points distincts A et B alors f est la symétrie axiale d'axe (AB).

Déms :

f est une isométrie.

f(A) = A, f(B) = B et A $\neq$ B.

- Si M $\in$ (AB) alors ……………………… (d'après thm 1).
- Si M $\in$ P \ (AB) et M' = f(M).
  M' $\neq$ M car si non on aura f(A) =A, f(B) = B et f(M) = M et par suite
  ……………………………………………
  ……
  ……………
  f(M) = M' et f(A) = A alors A $\in$ …………………………
  f(M) = M' et f(B) = B alors B $\in$ …………………………
  $\Rightarrow$ (AB) = méd[MM'] et $S_{(AB)}(M) = M'$.
  f(M) = M' $\Leftrightarrow$ $S_{(AB)}(M) = M'$. D'où f = $S_{(AB)}$.

Remarque : Une isométrie f qui laisse fixe deux points A et B est soit l' id_P soit $S_{(AB)}$.

Théorème n°5 :

Si une isométrie f laisse fixe un seul point I du plan alors f est une rotation de centre I et d'angle θ $\neq$ 2kπ.

Déms :

f est une isométrie telle que Inv(f) = {I}.

soit A $\in$ P\ {I} tel que f(A) = A'.

A' $\neq$ A car ………………………………………………

f(A) = A' et f(I) = I alors I $\in$ …………………………………

Considérons l'application g = $S_\Delta \, o \, f$.

g est une isométrie car c'est ……………………………………………………

g(I) = $S_\Delta \, o \, f\,(I)$ =

……

g(A) = $S_\Delta \, o \, f\,(A)$ =

……

g est une isométrie qui laisse fixe deux points distincts A et I donc g = …….. ou g = ……………..

si g = id_P
alors………

donc g = $S_{(AI)}$ ⇔ $S_\Delta \, o \, f$ = …………… ⇔ f = ……………………… avec $\Delta \cap (AI) = \{I\}$ ⇔ f =
…………………………………

Exercice :

Le plan est rapporté à un repère à un repère orthonormé direct.

f : P → P, M(x, y) → M'(x', y') tel que : x' = $\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y$ et y' = $\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y$.

1. Montrer que f est une isométrie du plan.
2. Déterminer Inv (f).
3. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

Isométrie sans points invariants :

Rappels et compléments : **Composée de deux symétries orthogonales S_Δ et $S_{\Delta'}$**

a)Cas où $\Delta // \Delta'$

$S_{\Delta'} o S_\Delta = T_{2\overrightarrow{AA'}}$ avec A un point quelconque de Δ et A' son projeté orthogonal sur Δ'.

Réciproquement:

$T_{\vec{u}} = S_{\Delta'} o S_\Delta$, avec Δ une droite quelconque dirigée par un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et Δ' l'image de Δ par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$

Toute translation peut être décomposée en un produit de deux symétries orthogonales d'une infinité des manières.

Cas particulier:

Lorsque $\Delta = \Delta'$ alors $S_{\Delta'} o S_\Delta$ = la translation de vecteur nul = l'identité.

b)Cas où Δ et Δ' sont sécantes en un point A.

$S_{\Delta'} o S_\Delta = Rot_{(A,\,2\alpha)}$ avec α une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{u_\Delta}, \overrightarrow{u_{\Delta'}}\right)$.

Réciproquement:

$Rot_{(A,\alpha)} = S_{D'} \, o \, S_D$; avec D une droite quelconque passant par A et D' la droite passant par A et telle que : $\left(\overrightarrow{u_D}, \overrightarrow{u_{D'}}\right) \equiv \frac{\alpha}{2} (\pi)$.

La décomposition d'une rotation en deux symétries orthogonales n'est pas unique.

Cas particulier: Lorsque $\Delta \perp \Delta'$ alors $S_{\Delta'} o S_\Delta$ est la symétrie centrale de centre le point d'intersection des droites Δ et Δ'.

Réciproquement, une symétrie centrale de centre un point A est la composée d'une infinité de manières de

deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires qui se coupent en A.

Théorème n°1 :

Soit O un point du plan, alors toute isométrie f se décompose de manière unique en la composée d'une translation et d'une isométrie g qui fixe O.

Déms :

Si f(O) = O', on pose $\vec{u} = \overrightarrow{OO'}$.

$t_{\overrightarrow{O'O}} \circ f\ (O) =$ ....

$\Rightarrow \varphi = t_{\overrightarrow{O'O}} \circ f$ est une isométrie qui fixe O $\Rightarrow$ f = $t_{\overrightarrow{OO'}} \circ \varphi$.

Soit f une isométrie telle que Inv(f) = ∅. Chechons la nature de f :

O est un point du plan tel que f(O) = O' ≠ O. (Th 1) $\Rightarrow$ f = $t_{\overrightarrow{OO'}} \circ \varphi$, où φ est une isométrie qui fixe O.

- Si φ = id_P alors f = ... et Inv(f) =............
- Si φ = S_Δ telle que O ∈ Δ alors f = $t_{\overrightarrow{OO'}} \circ S_\Delta$: trois cas se présentent :

- Si <u>(OO') ⊥ Δ</u> alors $t_{\overrightarrow{OO'}} = S_D \circ S_\Delta$ avec D = $t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{OO'}}(\Delta)$ et par suite f =

....

- <u>Si (OO') // Δ</u>. Montrons que Inv(f) = ∅.

En effet : si M ∈ Inv(f) alors f(M) = M donc $t_{\overrightarrow{OO'}} \circ S_\Delta$ (M) = M.

Posons S_Δ (M) = N, on aura $\overrightarrow{OO'}$ = ... $\Rightarrow$ (OO') ..... (MN), or (OO') // Δ donc Δ .... (MN)

Or Δ ⊥ (MN) : absurde. Donc Inv(f) = ∅.

- <u>Si (OO') n'est pas parallèle à Δ et (OO') n'est pas perpendiculaire à Δ</u>.

On peut écrire $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DO'}$ avec (OD) ⊥ Δ et (DO') // Δ.

$\Rightarrow$ f = $t_{\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DO'}} \circ S_\Delta = t_{\overrightarrow{DO'}} \circ \underbrace{t_{\overrightarrow{OD}} \circ S_\Delta}_{S_{\Delta'}} = t_{\overrightarrow{DO'}} \circ S_{\Delta'}$.

- Si φ = $r_{(O,\alpha)}$ alors f = $t_{\overrightarrow{OO'}} \circ r_{(O,\alpha)}$.

  $t_{\overrightarrow{OO'}} = S_{D''} \circ S_{D'}$ avec D' ⊥ (OO') en O et D'' = $t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{OO'}}(D')$; $r_{(O,\alpha)} = S_{D'} \circ S_D$ avec D = $r_{(O,-\frac{\alpha}{2})}(D')$.

  Donc f = ... : absurde car Inv(f) = ∅.

Théorème n°2 :

Une isométrie <u>sans points fixes</u> est soit une translation de vecteur non nul, soit la composée d'une translation de vecteur $\vec{u}$ et d'une symétrie orthogonale d'axe Δ tel que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de Δ

Définition :

On appelle symétrie glissante φ toute composée $T_{\vec{u}} o S_{\Delta}$ où $\vec{u}$ est un vecteur non nul directeur de la droite Δ.

* La droite Δ s'appelle l'axe de la symétrie glissante φ.

* Le vecteur $\vec{u}$ s'appelle le vecteur de la symétrie glissante φ.

Propriétés :

- Les éléments caractéristiques d'une symétrie glissante sont le vecteur et l'axe.
- $\vec{u}$ est un vecteur non nul directeur de la droite Δ. On a: $T_{\vec{u}} o S_{\Delta} = S_{\Delta} o T_{\vec{u}}$.
- Une symétrie glissante de vecteur $\vec{u}$ et d'axe la droite Δ.est bijective et sa réciproque est la symétrie
  glissante de vecteur - $\vec{u}$ et d'axe la droite Δ.
  Bijective car c'est ………………………….. ………et $T_{\vec{u}} o S_{\Delta}$ o $S_{\Delta} o T_{-\vec{u}}$ = ……………………………………………
- Si f est une symétrie glissante de vecteur $\vec{u}$ et d'axe Δ. Alors fof = $T_{2\vec{u}}$.
  fof =
……..
- Soit f une symétrie glissante de vecteur $\vec{u}$ et d'axe Δ.

  - La droite Δ est globalement invariante par l'application f.

  - La droite Δ est l'ensemble des milieux des segments [MM'], où M' = f(M).

Exercice :

Soit ABC un triangle équilatéral direct.

1. Montrer qu'il existe une rotation unique φ qui transforme A en B et C en A.
2. Supposons qu'il existe une symétrie glissante Ψ qui transforme A en B et C en A. Caractériser Ψ.