# I. Rappels

$I=[n_0,+\infty[$ désigne un intervalle de $\mathbb{N}$ ; $(n_0\in\mathbb{N})$ ; c'est à dire $I=\{n\in\mathbb{N}/n\geq n_0\}$.

| Suite arithmétique de raison r | Suite géométrique de raison q |
| --- | --- |
| * $U=(U_n)_{n\in I}$ est une suite arithmétique si et seulement si : il existe un réel fixe r tel que :<br>$\forall n\in I; U_{n+1}=U_n+r$ | * $V=(V_n)_{n\in I}$ est une suite géométrique si et seulement si : il existe un réel fixe q tel que :<br>$\forall n\in I;\ V_{n+1}=q\times V_n$ |
| * $U=(U_n)_{n\in I}$ étant une suite arithmétique de raison r, alors :<br>$\forall(n,m)\in I^2$; on a : $U_n=U_m+(n-m)r$<br>Si m = 0, alors : $\forall n\in I;\ U_n=U_0+nr$<br>Si m = 1, alors : $\forall n\in I;\ U_n=U_1+(n-1)\cdot r$<br>Si m = 2, alors : $\forall n\in I;\ U_n=U_2+(n-2)\cdot r$ | * $V=(V_n)_{n\in I}$ étant une suite géométrique de raison $q\neq 0$, alors :<br>$\forall(n,m)\in I^2$; on a : $V_n=V_m\times q^{n-m}$<br>Si m = 0, alors : $\forall n\in I;\ V_n=V_0\times q^n$<br>Si m = 1, alors : $\forall n\in I;\ V_n=V_1\times q^{n-1}$<br>Si m = 2, alors : $\forall n\in I;\ V_n=V_2\times q^{n-2}$ |
| * Soit $S=U_p+U_{p+1}+.......+U_k$.<br>S est la somme de n termes consécutifs de la suite arithmétique U ; ( n = k-p+1 )<br>$S=\frac{n}{2}(U_p+U_k)=\frac{n}{2}\left[2U_p+(k-p)r\right]$<br>$S=\frac{\text{Nombre de termes de S}}{2}(\text{1ér terme de S + dernier terme de S})$ | * Soit $S=V_p+V_{p+1}+.......+V_k$<br>S est la somme de n termes consécutifs de la suite géométrique V ; ( n = k-p+1 )<br>Si q = 1, alors $S=n\cdot V_p$<br>Si $q\neq 1$, alors : $S=V_p\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$ |
| Exemples :<br>$S=U_0+U_1+.......+U_n=\frac{n+1}{2}(U_0+U_n)$<br>$=\frac{n+1}{2}(2U_0+nr)$<br>$S=U_1+U_2+.......+U_n=\frac{n}{2}(U_1+U_n)$<br>$=\frac{n}{2}(2U_1+(n-1)\cdot r)$ | Exemples :<br><u>1ér cas</u> : q = 1.<br>$S=V_0+V_1+.......+V_n=(n+1)\cdot V_0$<br>$S=V_1+V_2+.......+V_n=n\cdot V_1$<br><u>2ème cas</u> : $q\neq 1$<br>$S=V_0+V_1+.......+V_n=V_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$<br>$S=V_1+V_2+.......+V_n=V_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$ |
| * $a,b$ et $c$ sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique $\Leftrightarrow 2b=a+c$ | * $a,b$ et $c$ sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique $\Leftrightarrow b^2=ac$ |
| | $q\in\mathbb{R}$ ; n $\in\mathbb{N}$<br>* $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=\begin{cases}+\infty \text{ si } q>1\\ 1 \text{ si } q=1\\ 0 \text{ si } q\in]-1,1[\\ \text{n'existe pas si } q\leq -1\end{cases}$ |

## Propriétés

$U=(U_n)_{n\in I}$ une suite réelle définie sur $I=[n_0,+\infty[$

- U est majorée sur I, si et seulement si, il existe un réel fixe M tel que : $\forall n\in I\,,\ u_n\le M$.
  Le réel M est un majorant de la suite U.
- U est minorée sur I, si et seulement si, il existe un réel fixe m tel que : $\forall n\in I\,,\ u_n\ge m$.
  Le réel m est un minorant de la suite U.
- Une suite qui est à la fois majorée et minorée est dite bornée.
- U est dite positive lorsque : $\forall n\in I\,,\ u_n\ge 0$.
- U est croissante $\Leftrightarrow\ \forall(n,p)\in I\times I\,,\ (n>p\Rightarrow u_n\ge u_p)\Leftrightarrow \forall n\in I\,,\ u_{n+1}\ge u_n$.
- U est strictement croissante $\Leftrightarrow\ \forall(n,p)\in I\times I\,,\ (n>p\Rightarrow u_n> u_p)\Leftrightarrow \forall n\in I\,,\ u_{n+1}> u_n$.
- U est décroissante $\Leftrightarrow\ \forall(n,p)\in I\times I\,,\ (n>p\Rightarrow u_n\le u_p)\Leftrightarrow \forall n\in I\,,\ u_{n+1}\le u_n$.
- U est strictement décroissante $\Leftrightarrow\ \forall(n,p)\in I\times I\,,(n>p\Rightarrow u_n< u_p)\Leftrightarrow \forall n\in I\,,\ u_{n+1}< u_n$.
- U est constante $\Leftrightarrow\ \forall(n,p)\in I\times I\,,\ u_n=u_p \Leftrightarrow \forall n\in I\,,\ u_{n+1}=u_n$
  $\Leftrightarrow$ il existe un réel $\lambda$ tel que $\forall n\in I\,,\ u_n=\lambda$.

## Convergence des suites réelles

$U=(U_n)_{n\in I}$ une suite réelle définie sur $I=[n_0,+\infty[$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ peut exister comme peut ne pas l'être, lorsqu'elle existe, elle est soit un nombre réel $\ell$, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

- Lorsqu'une suite réelle admet une limite alors elle est unique.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$ U est convergente vers $\ell$.
  $\Leftrightarrow\ \lim\limits_{n\to+\infty}|u_n-\ell|=0$.
- U est divergente $\Leftrightarrow \begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \text{ n'existe pas}\\ \text{ou}\\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\pm\infty\end{cases}$.
- Si $\begin{cases}u_n\le v_n \text{ pour tout } n>p\\ \text{et}\\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty\end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ existe et vaut $+\infty$.
- Si $\begin{cases}u_n\le v_n \text{ pour tout } n>p\\ \text{et}\\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n=-\infty\end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ existe et vaut $-\infty$.
- Si $\begin{cases}|u_n|\le v_n \text{ pour tout } n>p\\ \text{et}\\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0\end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ existe et vaut 0.

*Exercices : 5, 7, 8, 9, 10, 12 pages 47 et 48.*

## II. *Autres propriétés :*

- Soit $U=\left(U_n\right)_{n\in I}$ une suite réelle et $a$ fini ou infini.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = a \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = a \\ et \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = a \end{cases}.$$

Exercices : 2, 4 page 47.

- Toute suite convergente est bornée.

En effet : supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > n_0$, on a $\left|u_n-\ell\right|<\varepsilon$

Pour $\varepsilon=1$, on a : si $n>n_0$ alors $\ell-1<u_n<\ell+1$

On prend M le plus grand élément de $\left\{u_0,u_1,\ldots\ldots,u_{n_0},\ell+1\right\}$ et m le plus petit élément de $\left\{u_0,u_1,\ldots\ldots,u_{n_0},\ell-1\right\}$, on aura $m\le u_n\le M$, $\forall n\in I$.

- Toute suite croissante et majorée est convergente.

- Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Remarques :

Si une suite est croissante et non majorée alors elle tend vers $+\infty$.
Si une suite est décroissante et non minorée alors elle tend vers $-\infty$.

Exercice :

Soit $\left(U_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $u_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots\ldots+\dfrac{1}{2n}$

Montrer que U est croissante. En déduire qu'elle est convergente.

Exercice 11 page 48.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|u_n\right| = \left|\ell\right|$. (la réciproque est fausse).

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|u_n\right| = +\infty$. (la réciproque est fausse).

- Si $\begin{cases} \left(u_n\right) \text{ converge vers } \ell \\ \left(v_n\right) \text{ converge vers } \ell' \\ u_n<v_n \text{ à partir d'un certain rang} \end{cases}$ alors $\ell\le\ell'$.

- Si $\begin{cases} v_n\le u_n\le w_n \text{ à partir d'un certain rang} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\ell \\ \lim\limits_{n\to+\infty} w_n=\ell \\ \ell\in\mathbb{R} \end{cases}$ alors U est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$.

Exemple : $u_n=\dfrac{2}{n}\cos\left(n\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Exercice 16, 17, 21 et 22 pages 48, 49 et 50.

- Image d'une suite par une fonction :

Théorème : Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle I et $(u_n)$ une suite de points de I.

Si $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$.

- Si $(u_n)$ est une suite qui converge vers un réel $\ell$ et si $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f$ est une fonction continue en $\ell$ alors $f(\ell) = \ell$.

Exercice :

Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}} \end{cases}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.
2. Etudier la monotonie de U.
3. En déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

Exercices 18 et 23 pages 49 et 50.

- Suites adjacentes :

Définition

On dit que deux suites ( $u_n$ ) et ( $v_n$ ) sont **adjacentes** lorsque :
$u_n \leq v_n$, ( $u_n$ ) est une suite croissante , ( $v_n$ ) est une suite décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$

**Remarque**

La condition « pour tout n, $u_n \leq v_n$ » est inutile dans les hypothèses. Elle découle des trois autres.
En effet :
Démontrons que pour tout $n \in$ IN, $v_n \geq u_n$ .
Soit un entier $n$ quelconque.
La suite ( $u_n$ ) est croissante et la suite ( $v_n$ ) est décroissante, pour tout $p \geq n$, on a donc :
$v_p \leq v_n$ et $u_p \geq u_n$ , donc $-u_p \leq -u_n$
Ainsi pour tout $p \geq n$, $v_p - u_p \leq v_n - u_n$ .
On en déduit que $\lim\limits_{p\to+\infty} (v_p - u_p) \leq v_n - u_n$
Or $\lim\limits_{p\to+\infty} (v_p - u_p) = 0$, donc $0 \leq v_n - u_n$
Ainsi pour tout $n \in$ IN , $v_n \geq u_n$

Propriété

Si ( $u_n$ ) et ( $v_n$ ) sont deux suites adjacentes, alors elles sont convergentes et elles ont la même limite $\ell$.
De plus pour tout n : $u_n \leq u_{n+1} \leq \ell \leq v_{n+1} \leq v_n$

Preuve :

La suite ( $u_n$ ) est croissante, pour tout entier $n$, on a donc $u_n \geq u_0$ . On en déduit que pour tout entier $n$, $v_n \geq u_n \geq u_0$
La suite ( $v_n$ ) est donc décroissante et minorée par $u_0$. On en déduit que ( $v_n$ ) est une suite convergente.

La suite ( $v_n$ ) est décroissante, pour tout entier $n$, on a donc $v_n \leq v_0$ . On en déduit que pour tout entier $n$, $u_n \leq v_n \leq v_0$
La suite ( $u_n$ ) est donc croissante et majorée par $v_0$ . On en déduit que ( $u_n$ ) est une suite convergente.

Posons $L = \lim_{n \to +\infty} u_n$ et $L' = \lim_{n \to +\infty} v_n$
On a alors $\lim_{n \to +\infty} ( v_n - u_n ) = L' - L$
Or $\lim_{n \to +\infty} ( v_n - u_n ) = 0$ . On en déduit que $L = L'$

Les suites ( $u_n$ ) et ( $v_n$ ) sont donc convergentes et elles ont la même limite.

Activité 1 page 43

(indication : vérifier que pour tout $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ puis montrer que pour tout n, $|u_n| \leq 2$ ).