Déplacements Antidéplacements

4ème math

B.H.Hammouda Fethi

I / Classification des isométries : Déplacement – antidéplacement :

Définition :

Toute isométrie qui conserve les mesures des angles orientés s'appelle un déplacement .
Toute isométrie qui transforme les mesures des angles orienté en leurs opposées s'appelle : un antidéplacement .

Théorème :

La composée d'un nombre pair de symétries orthogonales est un déplacement .
La composée d'un nombre impair de symétries orthogonales est un antidéplacement .

Exemples :

- L'identité du plan , les rotations et les translation sont des déplacements .
- Les symétries orthogonales et les symétries glissantes sont des antidéplacements .

Conséquence :

Un déplacement qui fixe deux points distinct est l'id_p .

Théorème :

- La composée de deux déplacements est un déplacement.
- La composée de deux antidéplacements est un déplacement.
- La composée d'un déplacements est d'un antidéplacement est un antidéplacement .
- La réciproque d'un déplacement est déplacement .
- La réciproque d'un antidéplacement est antidéplacement .

Conséquence :

- Deux déplacements qui coïncident en deux points distincts sont égaux .
- Deux antidéplacements qui coïncident en deux points distincts sont égaux .

Théorème fondamentale :

Soit A, B, C et D des points du plan tels que $AB = CD \neq 0$.

- Il existe un unique déplacement qui envoie A sur C et B sur D .
- Il existe un unique antidéplacement qui envoie A sur C et B sur D .

II/Déplacement :

Théorème :

- Tout déplacement différent de id_p est soit une rotation soit une translation .
- Un déplacement qui n'a pas de point invariant est une translation de vecteur non nul .
- Un déplacement ayant un seul point fixe est une rotation d'angle non nul .

Théorème et définition :

Soit un déplacement .il existe un réel θ tel que pour tout point A et B distincts , d'image respectives A' et B' par f on a $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}\right) \equiv \theta[2\pi]$. θ s'appelle l'angle du déplacement f .

Théorème :

Soit f un déplacement d'angle θ :

- Si $\theta = 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ alors f est une translation .
- Si $\theta \neq 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ alors f est une rotation d'angle θ .

Corolaire :

Soit f un déplacement d'angle α et g un déplacement d'angle β alors $f \circ g$ est un déplacement d'angle $\alpha + \beta$.

Corolaire :

Soit R une rotation d'angle α et de centre I et R' une rotation d'angle β et de centre I' alors $f \circ g$ est soit une translation de vecteur non nul , Soit une rotation d'angle non nul .

* Si $\alpha+\beta \equiv 0[2\pi]$, il s'agit d'une translation de vecteur non nul .

* Si $\alpha+\beta \neq 0[2\pi]$ où $k \in \mathbb{Z}$, il s'agit d'une rotation d'angle $\alpha+\beta$

Corolaire2 :

Si f est un déplacement d'angle α alors f^{-1} est un déplacement d'angle $-\alpha$ .et en particulier $R^{-1}_{(I,\alpha)} = R_{(I,-\alpha)}$.

Activité 3 , 4 et5 page 58 :

Théorème :

La composée de deux translations $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$ est une translation $t_{\vec{u}+\vec{v}} = t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{v}+\vec{u}}$.

Théorème :

La composée d'une translation et d'une rotation d'angle non nul θ est une rotation d'angle θ.

III/Antidéplacement :

Théorème :

Une isométrie est un antidéplacement ssi c'est la composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation

Remarques :

- Un antidéplacement qui possède un point invariant est une symétrie orthogonale d'axe Δ passant par I .
- Un antidéplacement qui fixe deux points distincts A et B est la symétrie orthogonale d'axe (AB).
- Un antidéplacement est soit une symétrie orthogonale soit une symétrie glissante .

Théorème et définition :

Soit f une symétrie glissante .

Il existe un unique vecteur non nul $\vec{u}$ et une droite D unique tels que $f = t_{\vec{u}} \circ S_D = S_D \circ t_{\vec{u}}$ où $\vec{u}$ est vecteur directeur de D .

Cette décomposition est appelée forme réduite de f .

La droite D s'appelle l'axe de la symétrie glissante et $\vec{u}$ son vecteur . D et $\vec{u}$ sont les éléments caractéristique de la symétrie glissante .

Propriété :

Soit $f = t_{\vec{u}} \circ S_D = S_D \circ t_{\vec{u}}$ une symétrie glissante de vecteur $\vec{u}$ et d'axe D et $f(M) = M'$ alors :

- Le milieu de $[MM']$ appartient à D .
- Si M est point de D alors $\vec{u} = \overrightarrow{MM'}$.
- $f \circ f = t_{\vec{u}} \circ S_D \circ S_D \circ t_{\vec{u}} = t_{2\vec{u}}$ alors $f \circ f$ est une translation de vecteur $2\vec{u}$.

VI / Déplacements et nombres complexes

Théorème :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' .

- f est une translation de vecteur $\vec{u}$ ssi il existe un nombre complexe b tel que $z' = z + b$ où b est l'affixe de $\vec{u}$.
- f est une rotation d'angle non nul θ de centre I ssi , il existe deux nombres complexes a et b tels que $z' = az + b$ avec $a = e^{i\theta}$, $a \neq 1$ et $z_I = \dfrac{b}{1-a}$ est l'affixe de I.