Primitives

$4^{\text{ème}}$ math **B.H.Hammouda Fethi**

I/Définition :

Soit f et F deux fonctions définies sur un intervalle I . On dit que F est une primitive de f sur I lorsque F est dérivable sur I et $F'(x) = f(x)$, pour tout x de I .

Exemple :

Activité 2 page 97

Théorème1 :

Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I.

Théorème2 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .Si F et G sont deux primitives de f sur I , alors la fonction F-G est une constante sur I.

Corollaire :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .Soit x_0 un réel de I et y_0 un réel .alors il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Exercice :

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = x^2 + 1 + \cos x$.

Donner la primitive F de f tel que $F(0) = -2$.

II/ Primitive des fonctions usuelles :

La fonction f	I	La primitive F
$x \to a$	IR	$x \to ax + b$
$x \to x^n \quad , \quad n \in IN^*$	IR	$x \to \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$x \to \dfrac{1}{x^n} \quad , \quad n \in IN \setminus \{0,1\}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$x \to \dfrac{x^{-n+1}}{-n+1} + c$
$x \to \sqrt{x}$	$[0, +\infty[$	$x \to \dfrac{2}{3} x\sqrt{x} + c$
$x \to \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$	$x \to 2\sqrt{x} + c$
$x \to \sin x$	IR	$x \to -\cos x + c$
$x \to \cos x$	IR	$x \to \sin x + c$
$x \to \cos(ax + b)$	IR	$x \to \dfrac{1}{a} \sin(ax + b) + c$
$x \to \sin(ax + b)$	IR	$x \to -\dfrac{1}{a} \cos(ax + b) + c$
$x \to 1 + \tan^2 x$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$	$x \to \tan x + c$

Théorème :

Soit F et G deux primitives respectives de deux fonctions f et g sur un intervalle I .

- La fonction F+G est une primitive su I de f + g .
- Soit λ un réel , la fonction λF est une primitive sur I de λf .

Exemple :

Activité 1 page 99

III/ Calcul de primitives :

La fonction f	Condition	La primitive F
$u'u^n \ , \ n \in IN^*$		$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
$u'v+v'u$		$u.v$
$\dfrac{u'}{u^n} \ , \ n \in IN \setminus \{0,1\}$	$u(x) \neq 0 \ , \ \forall x \in I$	$\dfrac{u^{-n+1}}{-n+1}$
$\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$	$u(x) \neq 0, \forall x \in I$	$\dfrac{u}{v}$
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u(x) \succ 0 \ , \ \forall x \in I$	$2\sqrt{u}$
$u'\sqrt{u}$	$u(x) \geq 0 \ , \ \forall x \in I$	$\dfrac{2}{3}u\sqrt{u}$
$\dfrac{u'}{\sqrt[n]{u^{n-1}}} \ , \ n \in IN \setminus \{0,1\}$	$u(x) \succ 0 \ , \ \forall x \in I$	$n\sqrt[n]{u}$
$u'(w' \circ u)$	v est dérivable sur I	$v \circ u$