Fonction logarithme Népérien

$4^{ème}$ math **B.H.Hammouda Fethi**

Définition :

* On appelle fonction logarithme Népérien noté Ln la fonction définie sur $]0,+\infty[$ vérifiant :

$(Lnx)'=\frac{1}{x}$ pour tout $x\in]0,+\infty[$ et $Ln(1)=0$.

- La fonction Ln est la primitive de la fonction $x:\to\frac{1}{x}$ qui s'annule en 1 c.à.d.

  $x\to Lnx=\int_1^x\frac{1}{t}dt \quad , \quad x\succ 0$.

Propriété algébrique :

Pour tout $a\in IR^*_+$, $b\in IR^*_+$ et $n\in \mathbb{N}$ on a :

* $Ln(a.b)=Lna+Lnb$.

* $Ln\left(\frac{1}{a}\right)=-Lna$.

* $Ln\left(\frac{a}{b}\right)=Lna-Lnb$.

* $Ln(a^n)=nLna$

* $Ln(\sqrt{a})=\frac{1}{2}Lna$.

* $Ln(\sqrt[n]{a})=\frac{1}{n}Lna$.

Limite remarquable :

* $\lim_{x\to+\infty} Lnx=+\infty$.

* $\lim_{x\to0^+} Lnx=-\infty$

* $\lim_{x\to0^+} xLnx=0$.

* $\lim_{x\to+\infty}\frac{Lnx}{x}=0$.

* $\lim_{x\to1}\frac{Lnx}{x-1}=1$

* $\lim_{x\to0}\frac{Ln(x+1)}{x}=1$.

Etude de la fonction Ln :

* Posons $f(x)=Lnx$, f est définie , continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ et $(Lnx)'=\frac{1}{x}\succ 0$

pour tout $x\in]0,+\infty[$.

- La fonction f est continue est strictement croissante donc elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur IR..

- On a $Ln(1)=0$ alors :*** Pour tout $x\in]0.1]$; $Lnx\leq 0$.

  *** Pour tout $x\in[1,+\infty[$; $Lnx\geq 0$.

* Pour tout $a\in IR^*_+$, $a\in IR^*_+$; $Lna\geq Lnb \Leftrightarrow a\geq b$.

$Lna=Lnb \Leftrightarrow a=b$

* L'équation $Lnx=1$ possède une solution unique x_0 tel que $Lnx_0=1$ avec $x_0=e\simeq 2,718....$

x_0 est un nombre irrationnelle .

* $Lnx\succ 1 \Leftrightarrow x\in]e,+\infty[$.

* $Lnx\prec 1 \Leftrightarrow x\in]0,e[$

* $Lne=1$.

Activité :

Tracer la courbe de la fonction Ln dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Théorème :

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $m\in\mathbb{N}^*$ on a

* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(Lnx)^n}{x^m}=0$.

* $\lim\limits_{x\to0^+}x^m(Logx)^n=0$.

Théorème :

Soit U une fonction dérivable et non nulle sur un intervalle I alors la fonction $x\to Ln|U(x)|$ est dérivable sur I et pour tout $x\in]0,+\infty[$; $(Ln|U(x)|)'=\dfrac{U'(x)}{U(x)}$.

Exemple :

Soit f la fonction définie par $f:x\to Ln\sqrt{x^2-1}$.

Montrer f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et calculer $f'(x)$.

Théorème :

Soit U une fonction dérivable et ne s'annule pas sur I , alors la fonction $f:x\to\dfrac{U'(x)}{U(x)}$ admet pour primitive la fonction $f:x\to Ln|U(x)|+k$ où k est une constante réelle .

Exemple :

Activité 6 page 145.

Théorème :

La fonction $x\to xLnx-x$ est une primitive de la fonction $x\to Lnx$ sur IR^*_+.