Fonctions réciproques

$4^{\text{ème}}$ math

B.H.Hammouda Fethi

I/ Définitions :

Soit I un intervalle de IR et f une fonction définie sur I .

- On dit que f réalise une bijection de I sur $f(I)$ si pour tout y de $f(I)$ l'équation $f(x)=y$ admet une unique solution dans I .
- On appelle fonction réciproque de f et on note f^{-1} la fonction définie sur $f(I)$ qui à tout y de $f(I)$ associe l'unique solution dans I de l'équation $f(x)=y$.

Exercice1 :

Soit g la fonction définie sur $]-\infty,0]$ par $g(x)=2x^2-3$.

1) Déterminer $g(]-\infty,0])$.
2) Montrer que l'équation $g(x)=y$ admet une unique solution dans $]-\infty,0]$.
3) En déduire la fonction g^{-1} .

II/ Fonction réciproque d'une fonction strictement monotone :

Théorème :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I . on a les propriété suivantes :

- f réalise une bijection de I sur $f(I)$.
- la fonction réciproque de f est une bijection de $f(I)$ sur I et on a : pour tout $x\in I$ et $y\in f(I)$ $f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$.
- Pour tout $x\in I$, $f^{-1}\circ f(x)=x$ et pour tout $y\in f(I)$, $f\circ f^{-1}(y)=y$.
- f^{-1} a le même sens de variation sur $f(I)$ que f sur I .
- f^{-1} est continue sur $f(I)$.
- Les courbes représentatives de f est de f^{-1} dans un repère orthonormée sont symétrique par rapport à la droite $\Delta : y=x$.

Exercice2 :

Soit $g : x \rightarrow \sqrt{x^2+1}$.

a) Montrer que g réalise une bijection de IR_+ sur $[1,+\infty[$.
b) Déterminer la fonction g^{-1} .

Exercice3 :

Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x)=\sin x$.

1) Montrer que f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera .
2) Donner les valeurs de $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, $f^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $f^{-1}(1)$.
3) Tracer dans un repère orthonormée ζ_f et $\zeta_{f^{-1}}$.

Théorème :

Soit f une fonction strictement monotone d'un intervalle I sur $f(I)$, a un réel de I et $b=f(a)$.

Si f est dérivable en a et si $f'(a)\neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en b et $\left(f^{-1}\right)'(b)=\dfrac{1}{f'(a)}$.

Théorème :

Soit f une fonction bijection d'un intervalle I sur $f(I)$.

Si f est dérivable sur I et $f'(x)\neq 0$ pour tout $x\in I$,alors f^{-1}est dérivable sur $f(I)$ et

$\left(f^{-1}\right)'(y)=\dfrac{1}{f'\left[f^{-1}(y)\right]}$ pour tout $y\in f(I)$.

Suite de l'éxercice3 :

4) Montrer que f^{-1} est dérivable en $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
5) Etudier la dérivabilité de f^{-1} à droite en -1 et à gauche en 1.
6) Exprimer $\left(f^{-1}\right)'(x)$ pour tout $x\in]-1,1[$.

Exercice4 :

Activité 4 page 82.

III/ Fonction racine nième pour $n\geq 2$:

Théorème :

Soit $n\in IN^*\backslash\{1\}$, la fonction $f:x\to x^n$ est bijective de IR_+ sur IR_+ elle admet une fonction réciproque strictement croissante de IR_+ sur IR_+ appelée fonction racine $n^{ième}$, noté $\sqrt[n]{\ }$.

Conséquences :

- Pour tout réels positifs x et y , $y=x^n$ ssi $x=\sqrt[n]{y}$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty$.

Conséquences :

Soit deux entiers n et p tel que $n\geq 2$ et $p\geq 2$ et deux réel positifs a et b .alors :

$\sqrt[n]{a^n}=a$, $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$, $\sqrt[n]{a.b}=\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$,$b\neq 0$.

$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n.p]{a^p}$. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p=\sqrt[n]{a^p}$. $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}=\sqrt[np]{a}$.

Théorème :

Soit $n\in IN^*\backslash\{1\}$, la fonction $f:x\to\sqrt[n]{x}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et dérivable sur $]0,+\infty[$ .de plus

$f'(x)=\dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x^{n-1}}\right)}$ pour $x\succ 0$.

Théorème :

Soit U une fonction dérivable et positive sur un intervalle I et $n\geq 2$.

La fonction $f:x\to\sqrt[n]{u(x)}$ est continue sur I est dérivable en tout $x\in I$ tel que $u(x)\neq 0$.de plus $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{n\left(\sqrt[n]{u(x)}^{n-1}\right)}$,pour tout x de I tel que $u(x)\succ 0$.