Ensemble C des nombres complexes

$4^{\text{ème}}$ math **B.H.Hammouda Fethi**

A) Forme algébrique d'un nombre complexe :

Théorème :

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, de nombres appelés nombre complexe , tel que :

• $\mathbb{C}$ contient IR ;

• $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication pour lesquelles les règles de calcul sont les même que dans IR .

• Il existe dans C un nombre non réel , noté i , vérifiant $i^2 = -1$;

• Tout nombre complexe z s'écrit de façon unique sous la forme dite algébrique ou cartésienne $z = a + ib$ où a et b sont des réels.

Définitions :

-Le réel a est appelé partie réelle de z et est noté $\Re e(z)$.

-Le réel b est appelé partie imaginaire de z et est noté $\operatorname{Im}(z)$.

- Si $b = 0$ alors $z = a$ et z est réel .
- Si $a = 0$ alors $z = ib$ et z est appelé **imaginaire pur**.

Conséquence :

Si a , b , a' et b' sont des réels :

$$a + ib = a' + ib' \iff a = a' \quad et \quad b = b'$$

$$a + ib = 0 \iff a = 0 \quad et \quad b = 0 .$$

Opposé d'un nombre complexe :

Si $z = a + ib$ avec a et b réels alors on appelle opposé de z le complexe noté -z tel que : $-z = -a + i(-b)$.

B) Représentation géométrique d'un nombre complexe :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$.

Définitions

Soit le complexe $z = a + ib$, a et b deux réels

- Le point $M(a,b)$ est appelé le point image de z .
- Le vecteur $\vec{V}(a,b)$ est le vecteur image de z .
- Le complexe z est **l'affixe** du point M noté $M(z)$ et l'affixe du vecteur $\vec{V}$ noté $aff(\vec{V}) = z$.

Affixe d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$

$aff(\overrightarrow{AB}) = aff(B) - aff(A)$ on note souvent : $Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A$.

Propriétés :

Pour tous vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ et tout réel α , $aff\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=aff\left(\vec{u}\right)+aff\left(\vec{v}\right)$, $aff\left(\alpha\vec{u}\right)=\alpha aff\left(\vec{u}\right)$

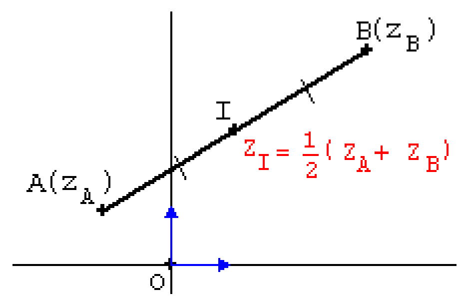
Conséquence :

* Deux vecteurs non nuls $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaire ssi $\dfrac{aff\left(\vec{U}\right)}{aff\left(\vec{V}\right)}\in IR$ .en particulier A,B et C trois points (distincts) sont alignées ssi $\dfrac{Z_A-Z_B}{Z_A-Z_C}\in IR$

* Deux vecteurs non nuls $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont orthogonaux ssi $\dfrac{aff\left(\vec{U}\right)}{aff\left(\vec{V}\right)}\in iIR$ en particulier A,B et C trois points (distincts) , $(AB)\perp(AC)$ ssi $\dfrac{Z_A-Z_B}{Z_A-Z_C}\in iIR$.

<u>Application1 :</u>

Déterminer et construire l'ensemble des pts M d'affixe z tel que $\dfrac{z-i}{z-1}\in iIR$



Affixe du milieu d'un segment :

Si I est le milieu du segment $[A,B]$ alors $Z_I=\dfrac{Z_A+Z_B}{2}$.

C) Conjugué d'un nombre complexe :

Définition :

On appelle conjugué du nombre complexe $z=a+ib$, a et b deux réels , le complexe noté $\bar{z}$ et définit par : $\bar{z}=a-ib$.

Interprétation géométrique :

Les points image de deux complexes conjuguées sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses .

Remarque : $\Re e(z)=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$ ***et*** $\mathrm{Im}(z)=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$.

Théorème :

Soit z un nombre complexe .

1) z est réel si et seulement si $z=\bar{z}$.
2) z est imaginaire pur si et seulement si $\bar{z}=-z$.

Propriété :

Pour tout complexes z et z' :

1) $\bar{\bar{z}}=z$.
2) $\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z'}$ et $\overline{zz'}=\bar{z}\,\bar{z'}$
3) Pour tout entier naturel non nul n : $\left(\overline{z^n}\right)=\left(\bar{z}\right)^n$
4) Si $z\neq 0$ $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\dfrac{1}{\bar{z}}$ et $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)}=\dfrac{\bar{z'}}{\bar{z}}$.
5) Si $z=a+ib$ où a et b sont des réels alors $z\bar{z}=a^2+b^2$ donc pour $z\neq 0$, on a

$\dfrac{1}{z}=\dfrac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\dfrac{\bar{z}}{a^2+b^2}=\dfrac{a}{a^2+b^2}-i\dfrac{b}{a^2+b^2}$ c'est la méthode utilisée pour écrire sous forme algébrique un quotient .

Application2 :

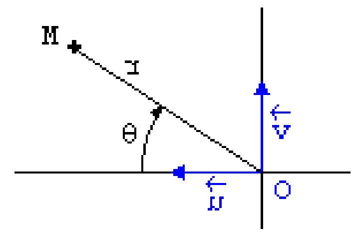
Ecrire sous forme algébrique les complexe : $\dfrac{2}{1+i}$ et $\dfrac{1+3i}{2-i}$

D) *Module et argument d'un nombre complexe non nul :*

Définition :

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul d'image M dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$, soit (r,θ) un couple de coordonnée polaire du point M :

- Le réel r est appelé module de z noté $|z|$;
- Le réel θ est appelé argument de z et noté $\arg(z)$.



On a donc : $|z| = r = OM = \sqrt{a^2+b^2}$, et $\arg(z) \equiv \theta \equiv (\vec{u},\overrightarrow{OM})[2\pi]$.

Remarques :

- Le nombre complexe 0 a pour module 0 mais n'a pas d'argument .
- Tout complexe non nul z a une infinité d'arguments . Si θ l'un d'eux , tout autre argument de z est de forme $\theta + 2k\pi$ où $k \in Z$ .On écrit alors : $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$.

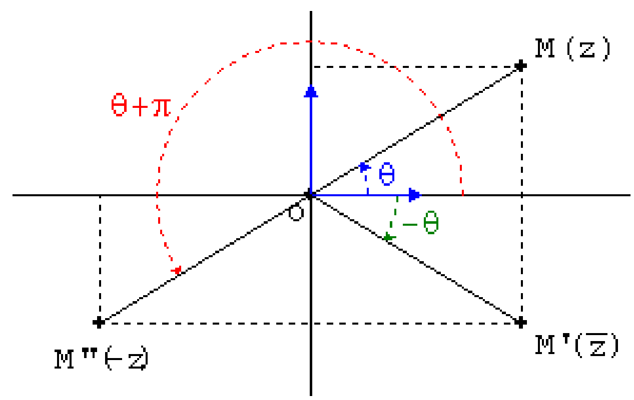
Application :

Déterminer et construire l'ensemble des pts M d'affixe z tel que : $|z-1-i| = 2$

Déterminer et construire l'ensemble des pts M d'affixe z tel que : $|z-i| = |z+1|$

Conséquences :

1) Si $z = a + ib$ où a et b sont des réels alors $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.
2) Le module d'un nombre réel x est la valeur absolue de x .
3) z est réel non nul ssi $\arg(z) \equiv 0[2\pi]$ ou $\arg(z) \equiv \pi[2\pi]$
4) z est imaginaire pur ssi $\arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $\arg(z) \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.
5) Soit z un complexe non nul équivaut à $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$
   et $\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z)[2\pi]$



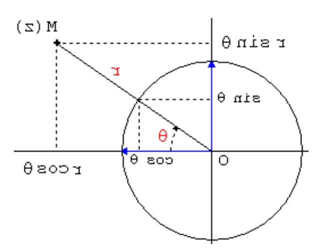
E) *Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul :*

Théorème :

Soit $z = a + ib$ où a et b sont des réels, un complexe non nul

Si $|z| = r$ et si $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$ alors $a = r\cos\theta$

et $b = r\sin\theta$



Définition :

Soit z un complexe non nul de module r et dont l'argument est θ l'écriture $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ est appelée forme trigonométrique noté aussi $z=[r,\theta]$ .avec $r=\sqrt{a^2+b^2}$,$\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Application3 :

Ecrire sous forme trigonométrique : -1 , 3 , i , 3i , $-\frac{1}{2}i$, $1+i$, $\sqrt{3}+i$, $1-i\sqrt{3}$

Egalité de deux nombre complexe :

Soit $z=[r,\theta]$ ***et*** $z'=[r',\theta']$ ***;*** $z=z'$ ***équivaux à*** $r=r'$ ***et*** $\theta\equiv\theta'[2\pi]$**.**

Théorème :

Si $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ avec $r\succ 0$ alors $|z|=r$ et $\arg(z)\equiv\theta[2\pi]$.

F) Propriétés des modules et des arguments :

Propriétés des modules :

Pour tout complexes z et z' :

1) $|z|=0 \iff z=0$.

2) $|-z|=|\bar{z}|=|-\bar{z}|=|z|$

3) $|z|=\sqrt{z\bar{z}}$ ou $|z|^2=z\bar{z}$

4) $|z+z'|\leq|z|+|z'|$

5) $|zz'|=|z||z'|$

6) si $z\neq0$ alors $\left|\dfrac{1}{z}\right|=\dfrac{1}{|z|}$, $\left|\dfrac{z'}{z}\right|=\dfrac{|z'|}{|z|}$ et pour tout $n\in Z$ $|z^n|=|z|^n$.

Propriétés des arguments :

Pour tout complexes non nul z et z' :

1) $\arg(zz')\equiv\arg(z)+\arg(z')[2\pi]$

2) $\arg\dfrac{1}{z}\equiv-\arg(z)[2\pi]$ et $\arg\left(\dfrac{z'}{z}\right)\equiv\arg(z')-\arg(z)[2\pi]$.

3) $\arg(\bar{z})\equiv-\arg(z)[2\pi]$.

4) pour tout $n\in Z$, $\arg(z^n)\equiv n\arg(z)[2\pi]$.

Application4 :

Ecrire sous forme trigonométrique : $(\sqrt{3}+i)(1-i\sqrt{3})$,$\dfrac{(\sqrt{3}+i)(1-i)}{1+i\sqrt{3}}$, $(\sqrt{3}-i)^3(1+i\sqrt{3})^2$

G) *Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul.*

Définition :

Pour tout réel θ on pose : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Alors , si z est un nombre complexe non nul de module r et dont un argument est θ, on appelle forme exponentielle de z l'écriture : $z = re^{i\theta}$.

Conséquences :

$e^{i0} = 1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$, $e^{i\pi} = -1$, et pour tout entier k , $e^{i\theta} = e^{i(\theta+2k\pi)}$

Règle de calcule sur les formes exponentielles :

θ et θ' sont deux réels quelconques , r et r' sont des réels strictement positifs .

1) $re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \quad \Leftrightarrow \quad r = r' \quad et \quad \theta \equiv \theta'[2\pi]$.
2) $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$.
3) $-re^{i\theta} = re^{i(\theta+\pi)}$.
4) $re^{i\theta}r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$
5) $\dfrac{1}{re^{i\theta}} = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$.
6) $\dfrac{r'e^{i\theta'}}{re^{i\theta}} = \dfrac{r'}{r}e^{i(\theta'-\theta)}$.
7) $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$, pour tout $n \in \square$.

Formule d'Euler :

Pour tout réel θ : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

<u>Application5 :</u>

Ecrire sous forme exponentielle : $(\sqrt{3}+i)(1-i\sqrt{3})$, $\dfrac{(\sqrt{3}+i)(1-i)}{1+i\sqrt{3}}$, $(\sqrt{3}-i)^3(1+i\sqrt{3})^2$, $-2ie^{i\frac{3\pi}{4}}$.

$\cos\theta - i\sin\theta$. $-\cos\theta - i\sin\theta$, $\sin\theta + i\cos\theta$, $\sin\theta - i\cos\theta$,$1+\cos\theta + i\sin\theta$ et $1-\cos\theta + i\sin\theta$ dans le cas où $\theta \in]0,\pi[$ puis si $\theta \in]\pi, 2\pi[$

Formule de Moivre :

Pour tout réel θ et pour tout $n \in IN$, $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (e^{i\theta})^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

H) *Angles orientés et nombres complexes :*

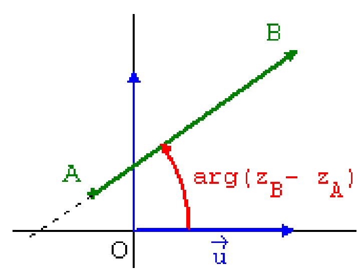
Théorème :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$.

Soit A ,B , C et D les points d'affixes respectives Z_A , Z_B ,Z_C et Z_D tel que $AB \neq 0$ et $CD \neq 0$

alors $(\vec{u},\overrightarrow{AB}) \equiv \arg(Z_B - Z_A)[2\pi]$ et

$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) \equiv \arg\left(\dfrac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A}\right)[2\pi]$.



Application6 :

Déterminer et construire l'ensemble des pts M d'affixe z tel que $\arg(z-i)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

Déterminer et construire l'ensemble des pts M d'affixe z tel que $\arg\left(\frac{z-i}{z-1}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Déterminer et construire l'ensemble des pts M d'affixe z tel que $\arg\left(\frac{z-i}{z-1}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

Application7: ****

On considère le nombre complexe $z=1-i+e^{i\theta}$ où $\theta\in[0,\pi]$, Déterminer et construire l'ensemble des pts M d'affixe z lorsque θ varie dans $[0,\pi]$.

I)Racines carrées d'un nombre complexe :

Activité :

* Déterminer z tel que $z^2=1+i\sqrt{3}$ (on pose $z=re^{i\theta}$)
* Déterminer z tel que $z^2=8-6i$.

D'une façon générale la résolution d'une équation de type $z^2=u$ où $u\in\mathbb{C}$ et $z=x+iy$ revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x^2-y^2=\Re e(u) \\ 2xy=\operatorname{Im}(u) \\ x^2+y^2=|u| \end{cases}$$

L'équation $z^2=u$ possède deux solution opposées .

Application8:

Déterminer les racines carrée du nombre complexe $3+4i$

J) Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $az^2+bz+c=0$ où $a\neq 0$:

Théorème :

Soit $\Delta=b^2-4ac$ est le discriminant de l'équation , posons δ une racine carrée de Δ :

l'équation $az^2+bz+c=0$ admet dans $\mathbb{C}$ une solutions :

$$z_1=\frac{-b-\delta}{2a} \quad et \quad z_2=\frac{-b+\delta}{2a}$$

Conséquences :

* Dans tous les cas : $az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$; $z_1+z_2=\frac{-b}{a}$ et $z_1z_2=\frac{c}{a}$.
* Si $a+b+c=0$ alors $z_1=1$ et $z_2=\frac{c}{a}$.
* Si $a-b+c=0$ alors $z_1=-1$ et $z_2=-\frac{c}{a}$.
* Si a ,b et sont des réelles et si z_0 est une solution alors $\overline{z_0}$ est l'autre solution .

Application9:

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$z^2-(1-i)z+2-2i=0$

$z^2+(\cos\alpha)z+\dfrac{1}{4}=0$ où $\alpha\in\mathbb{R}$

K) *Racines n^ième^ d'un nombre complexe :*

Activité :

* Déterminer z tel que $z^4=-2-i2\sqrt{3}$ (on pose $z=re^{i\theta}$).

* Déterminer z tel que $z^n=u$ où $u\in\mathbb{C}$.

On pose $z=re^{i\theta}$ et $u=\mathrm{Re}^{i\theta'}$ l'équation devient $(re^{i\theta})^n=\mathrm{Re}^{i\theta'}$ $\Leftrightarrow$ $r^ne^{ni\theta}=\mathrm{Re}^{i\theta'}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^n=R \\ n\theta=\theta'+2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r=\sqrt[n]{R} \\ \theta=\dfrac{\theta'}{n}+\dfrac{2k\pi}{n} \quad k\in\{0,1,2,\dots\dots,n-1\} \end{cases}$$

alors $z_k=re^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$ où $k\in\{0,1,2,\dots\dots,n-1\}$

Théorème et définition :

Soit u un nombre complexe non nul d'argument θ et $n\in\mathbb{N}^*$.

L'équation $z^n=u$ admet dans $\mathbb{C}$, n solutions distinctes définies par

$z_k=re^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$, $k\in\{0,1,2,\dots\dots,n-1\}$,où r est le réel strictement positif tel quelque $r^n=|u|$.

Ces solutions sont appelées les racines n^ième^ du nombre complexe u .

<u>Application10:</u>

- Déterminer les racines cubiques de l'unité .
- Déterminer les racines sixième de -1

L) *Exemples d'équation de degré supérieur ou égal à 3 :*

Activité :

On considère , dans $\mathbb{C}$,l'équation (E) : $z^3+(1-4i)z^2-(7+3i)z+6i-2=0$.

1) Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire et la déterminer .
2) Résoudre l'équation (E) .