

A-I°/ Continuité et limites en un réel :Théorème 1 :

- Toute fonction polynôme est continue en tout réel de \mathbb{R} .
- Toute fonction rationnelle est continue en tout réel de son domaine de définition.
- La fonction **cos** et la fonction **sin** sont continues en tout réels de \mathbb{R} .

Théorème 2:

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I et $a \in I$:

- Si f est continue en a alors αf , $|f|$, et f^n ($n \in \mathbb{N}^*$) sont continues en a.
- Si f est continue en a et $f(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ et $\frac{1}{f^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) sont continues en a.
- Si f et g sont continues en a alors $f + g$ et $f * g$ sont continues en a.
- Si f et g sont continues en a et $g(a) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ sont continues en a.
- Si f est positive sur I et continue en a alors \sqrt{f} est continue en a.

Exercice :

Soit $f : x \rightarrow \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 9}$ calculer $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

La fonction g définie sur $\mathbb{R} - \{-3\}$ par : $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathbb{R} - \{-3\} \\ \frac{1}{3} & \text{si } x = 3 \end{cases}$. s'appelle un prolongement par

continuité de f en 3.

Exercice :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{x^2 + 1 - \cos x}{x}$, montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et déterminer son prolongement.

Théorème 3 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I sauf en $a \in I$.

Si f admet une limite finie α quand $x \rightarrow a$ alors la fonction g définie sur I par $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \alpha & \text{si } x = a \end{cases}$

Est continue en a et s'appelle un prolongement par continuité de f en a.

Théorème 4 :

Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I est continue en $a \in I$ ssi $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.

Exercice :

Soit $f : x \rightarrow \begin{cases} \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x}} & \text{si } x < 1 \\ \frac{x^2-2x+1}{\sqrt{x-1}} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ et $f(1)=0$. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, en déduire si f est

continue en 1.

II° / Continuité sur un intervalle :

Théorème 1 :

- Une fonction est continue sur un intervalle ouvert I si elle est continue en tout réel de I .
- Une fonction est continue sur un intervalle $[a, b]$ si elle est continue sur $]a, b[$, à droite en a et à gauche en b .

De façon analogue , on définit la continuité de f sur les intervalles $[a, b[$, $]a, b]$, $[a, +\infty[$ et $]-\infty, a]$.

Exercice :

Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $\begin{cases} f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2} & \text{si } x \in]0, \pi], \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$. Montrer que f est continue sur $[0, \pi]$.

III°/Opérations sur les limites :

Lim f	Lim g	Lim f + g		Lim f	Lim g	Lim f * g		Lim f	Lim g	Lim f/g
L	L'	L+L'		L	L'	L*L'		L	L' ≠ 0	L/L'
L	+∞	+∞		+∞	L' < 0	-∞		+∞	L' < 0	-∞
-∞	L'	-∞		+∞	L' > 0	+∞		+∞	L' > 0	+∞
-∞	-∞	-∞		+∞	+∞	+∞		L	+∞	0
+∞	+∞	+∞		+∞	-∞	-∞		L	-∞	0
				-∞	-∞	+∞		L ≠ 0	0	Règles des signes

Remarque :

Si on obtient des résultats de la forme $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $-\infty * 0$ ou $(+\infty) + (-\infty)$ ce sont des formes indéterminées , on ne peut pas conclure directement .

Exercice :

Activité page 8.

B°/Branches infinies :

Rappel :

La fonction f		Interprétation graphique
$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$	ou	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$
		La droite D : $x = a$ est asymptote à ζ_f
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$	ou	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$
		La droite D : $y = L$ est asymptote à ζ_f
$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$	ou	$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$
		La droite D : $y = ax + b$ est asymptote à ζ_f

Etude des branches infinies :

Si on a $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ alors on calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$.

*** Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ alors ζ_f admet une **branche infinie parabolique de direction** (xx') .

*** Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \pm \infty$ alors ζ_f admet une **branche infinie parabolique de direction** (yy')

*** Si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$ alors **on calcule** $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$ alors :

* Si $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b$ la droite $D : y = ax + b$ est asymptote à ζ_f .

* Si $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \infty$ alors ζ_f admet une **branche infinie parabolique de direction** $y = ax$.

Exercice :

1) Soit la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$.

Etudier la nature des branches infinies de ζ_f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

2) Soit la fonction définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(x) = 2x + \sqrt{x+1}$.

a) Etudier les variations de f .

b) Etudier la nature des branches infinies de ζ_f au voisinage de $+\infty$ et tracer ζ_f .

C°/Continuité et limite des fonctions composées :

Définition :

Soit U une fonction définie sur un ensemble I et V une fonction définie sur un ensemble J tel que $U(I) \subset J$.

La fonction $V \circ U$ définie sur I par $V \circ U(x) = V(U(x))$ est appelée fonction composée de U et V .

Exemples :

** La fonction $f : x \rightarrow \cos \frac{\pi x^2}{1+x^2}$ est la composée de deux fonctions définies sur \mathbb{R} par

$U : x \rightarrow \frac{\pi x^2}{1+x^2}$ et $V : x \rightarrow \cos x$.

** La fonction $f : x \rightarrow \frac{\sin^2 x + \sin x}{1 + \sin x}$ est la composée de deux fonctions $U : x \rightarrow \sin x$ définie sur \mathbb{R}

et la fonction $V : x \rightarrow \frac{x^2 + x}{1+x}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Théorème 1 :

Soit U une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant a et V une fonction définie sur J , contenant $U(a)$.

- Si U est continue en a et V est continue en $U(a)$, alors la fonction $V \circ U$ est continue en a .
- Si U est continue sur un ensemble I et V est continue sur J alors $V \circ U$ est continue sur I .

Exercice :

Etudier la continuité de f sur I :

$$f : x \rightarrow \sin \sqrt{x^2 + x + 1} \quad I = \mathbb{R} \quad . \quad f : x \rightarrow \cos \left(\frac{x^2}{x-3} \right) \quad I =]3, +\infty[.$$

D°/Limite d'une fonction composée :

Théorème :

Soit U et V deux fonctions. soient a , b et c des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$

Si $\lim_{x \rightarrow a} U(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} V(x) = c$ alors $\lim_{x \rightarrow a} V(U(x)) = c$.

Exercice :

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \tan\left(\frac{\pi}{2x}\right), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right).$$

Etudier la continuité de f en a : $f : x \rightarrow \begin{cases} \frac{\sin(\sqrt{x-1})}{\sqrt{x-1}} & \text{si } x \in]0, +\infty[\setminus \{1\} \\ f(1)=1 & \end{cases}$ et a = 1.

E°/ Limites et ordres :

Théorème de comparaison :

Soit a un réel fini ou infini, l et l' deux réels.

- * Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ et $f(x) \leq g(x)$ alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$.
- * Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ et $f(x) \geq g(x)$ alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$.
- * Si $|f(x) - l| \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.
- * Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ et $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ alors $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$.
- * Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l'$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ et $f(x) \leq g(x)$ alors $l \leq l'$.

Exercice :

Montrer que pour tout réel positif x on a : $-\frac{1}{x} \leq \frac{-\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}$ en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\cos x}{x}$.

F°/ Image d'un intervalle par une fonction continue :

Théorème :(rappel)

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle .

Théorème :

L'image d'un intervalle fermé bornée [a,b] par une fonction continue est un intervalle fermé bornée [m,M] où m est le minimum de f sur [a,b] et M est le maximum de f sur [a,b] .

Exemple :

Soit $f : x \rightarrow x^2$ déterminer $f([-1,1])$.

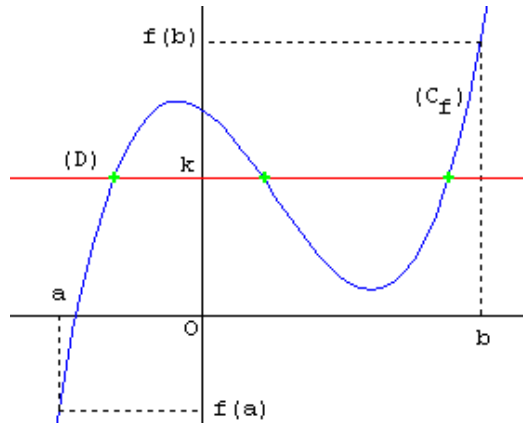
Remarques :

L'intervalle I	f est strict croissante sur I alors $f(I) =$	f est strict décroissante sur I alors $f(I) =$
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$[a, b[$	$\left[f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), f(a) \right]$
$]a, b[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$
$] -\infty, a]$	$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(a) \right]$	$\left[f(a), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$
$]a, +\infty[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$
$] -\infty, +\infty[$	$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$

G° Théorème des valeurs intermédiaires :

Théorème :

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un réel $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = k$ c.à.d l'équation $f(x) = k$ possède **au moins** une solution $c \in]a, b[$



En particulier Si f est continue sur $[a, b]$ **et** $f(a) \times f(b) < 0$ alors il existe **au moins** un réel $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$ c.à.d l'équation $f(x) = 0$ possède au moins une solution .

Remarques :

Si en plus f est **strictement monotone** alors cette solution est unique .

