

I. Rappels

1. Continuité

Définitions (Rappels)

- Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$

f continue en a si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, a + \alpha[$ ($\alpha > 0$)

f est continue à droite en a si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a - \alpha, a]$ ($\alpha > 0$)

f est continue à gauche en a si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$



Pour étudier la continuité d'une fonction f en un point a il faut que f soit définie en a , à droite de a et à gauche de a

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$

f continue en a **si et seulement si** f est continue à droite et à gauche en a

Exemples

- ❖ Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = -3 \end{cases}$$

Montrons que f est continue en 1.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x - 4)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 4) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -3 = f(1) \text{ donc } f \text{ est continue en } 1$$

- ❖ Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sin 2x}{x} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x^2 - 1 & \text{si } x \in [0, 2[\\ f(x) = \sqrt{x + 7} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Etudions la continuité de f en 0 et 2.

- Etude de la continuité en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin 2x}{x} = 2 \neq f(0) \quad (f(0) = -1)$$

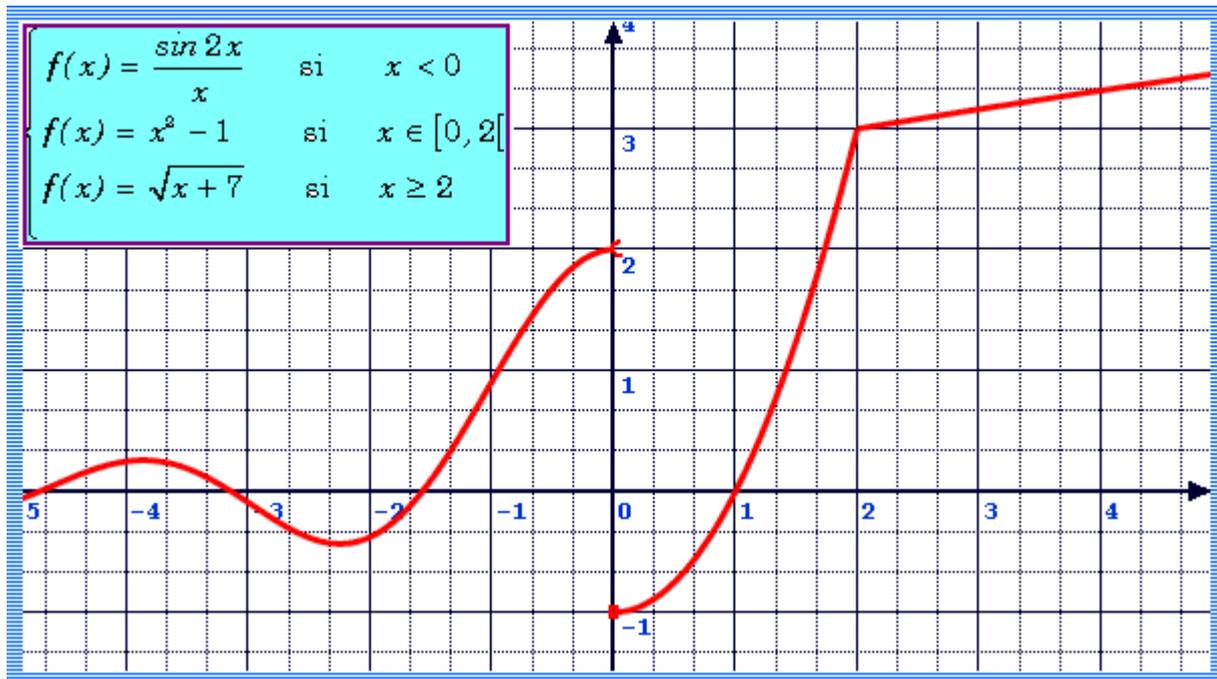
D'où f n'est pas continue à gauche en 0 et donc f n'est pas continue en 0.

- Etude de la continuité en 2.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 1) = 3 = f(2) \Rightarrow f \text{ est continue à gauche en } 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x+7} = 3 = f(2) \Rightarrow f \text{ est continue à droite en } 2.$$

Conclusion : f est continue à gauche et à droite en 2 donc f est continue en 2



Opérations sur les fonctions continues

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

- Si f est continue en a alors chacune des fonctions αf , $|f|$, f^n ($n \in \mathbb{N}^*$) est continue en a .
- Si f et g sont continues en a alors les fonctions $f+g$ et fg sont continue en a .
- Si f et g sont continues en a et $g(a) \neq 0$ alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continue en a .
- Si f est continue en a et positive sur l'intervalle I alors la fonction \sqrt{f} est continue en a

- Toute fonction polynôme est continue en tout point de \mathbb{R} .
- Toute fonction rationnelle est continue en tout point de son domaine de définition.
- Chacune des fonctions sinus et cosinus est continue en tout point de \mathbb{R} .
- La fonction Tangente est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Prolongement par continuité

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I , sauf en un réel a de I .

Si f admet une limite finie l en a alors la fonction g définie sur I par :

$$g(x) = f(x) \text{ si } x \neq a \text{ et } g(a) = l \text{ est continue en } a$$

On dit que f est prolongeable par continuité en a et que g est son prolongement par continuité en a .

Exemple

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par : $f(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{x^2}$

Montrons que f est prolongeable par continuité en 0.

Et pour cela il faut montrer que f admet une limite finie en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 4 \frac{1 - \cos(2x)}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 4 \frac{1 - \cos(2x)}{(2x)^2} = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

Donc f est prolongeable par continuité en 0 et son prolongement est la fonction g définie

$$\text{sur } \mathbb{R} \text{ par : } g(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{x^2} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } g(0) = 2$$

Continuité sur un intervalle

- ❖ Une fonction est continue sur un intervalle ouvert si elle est continue en tout point de cet intervalle.
- ❖ Une fonction f est continue sur un intervalle $[a, b]$ si elle est continue sur $]a, b[$, à droite en a et à gauche en b .
- ❖ De la même façon, on définit la continuité d'une fonction sur les intervalles $[a, b[$, $]a, b]$, $[a, +\infty[$ et $]-\infty, a]$

Exemple

Soit la fonction f définie sur $[0, \pi[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{\sin x} & \text{si } x \in]0, \pi[\\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Montrons que f est continue sur $[0, \pi[$.

- Sur $]0, \pi[$, f est le rapport de deux fonctions continues sur $]0, \pi[$ et dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle donc f est continue sur $]0, \pi[$.
- A droite en 0, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1 = f(0)$ donc f est continue à

droite en 0.

Conclusion : f est continue sur $]0, \pi[$ et continue à droite en 0 donc f est continue sur $[0, \pi[$.

2. Limites

Les résultats résumés dans les tableaux suivants concernent les opérations sur les limites en un réel a , à droite en a , à gauche en a ou à l'infini.

$\lim f$	$\lim g$	$\lim (f+g)$	$\lim f$	$\lim g$	$\lim(f \times g)$
L	L'	L+L'	L	L'	LL'
L	$+\infty$	$+\infty$	$L \neq 0$	∞	∞ (RS)
L	$-\infty$	$-\infty$	∞	∞	∞ (RS)
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	∞	On ne peut pas conclure
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$			
$+\infty$	$-\infty$	On ne peut pas conclure			
$-\infty$	$+\infty$				

$\lim f$	$\lim g$	$\lim\left(\frac{f}{g}\right)$
L	$L' \neq 0$	$\frac{L}{L'}$
∞	$L' \neq 0$	∞ (RS)
L	∞	0
∞	∞	On ne peut pas conclure
0	0	

RS : Appliquer la règle des signes

On ne peut pas conclure : Dans une telle situation, une transformation convenable de l'écriture permet le calcul de la limite.

Résultat pratiques

- ❖ La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ ou $-\infty$ est la limite de son monôme de plus haut degré.
- ❖ La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ ou $-\infty$ est la limite du quotient du monôme de plus haut degré du numérateur et du monôme de plus haut degré du dénominateur

Exemples

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2x + 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x = -\infty$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Limites de fonctions trigonométriques

On rappelle les résultats suivants :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = a \quad (a \in \mathbb{R}) ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

Exercice

Déterminer la limite de $\frac{1 - \sqrt{2} \cos x}{1 - \sqrt{2} \sin x}$ quand x tend vers $\frac{\pi}{4}$

Correction

Posons $h = x - \frac{\pi}{4}$, alors $x = h + \frac{\pi}{4}$.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sqrt{2} \cos x}{1 - \sqrt{2} \sin x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{2} \cos \left(h + \frac{\pi}{4} \right)}{1 - \sqrt{2} \sin \left(h + \frac{\pi}{4} \right)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{2} \left(\cosh \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sinh \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right)}{1 - \sqrt{2} \left(\sinh \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \cosh \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right)}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cosh + \sinh}{1 - \cosh - \sinh} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cosh}{h} + \frac{\sinh}{h}}{\frac{1 - \cosh}{h} - \frac{\sinh}{h}} = \frac{1}{-1} = -1$$

II. Branches infinies

Soit f une fonction et \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère cartésien (O, \vec{i}, \vec{j})
 $M(x, y)$ un point de la courbe \mathcal{C}

On dit que la courbe \mathcal{C} admet une branche infinie si x ou y tend vers l'infini.

1. Asymptote parallèle à l'axe des ordonnées

Soit f une fonction et \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan
La droite d'équation $x = a$ ($a \in \mathbb{R}$) est une asymptote à la courbe \mathcal{C}
si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$

Exemple

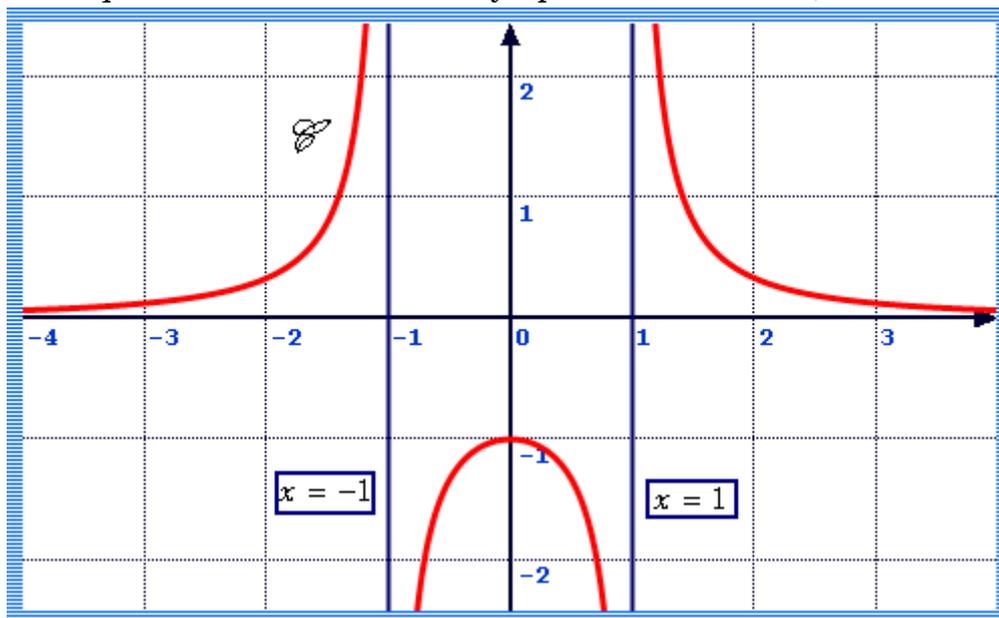
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ par : $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$

On a : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x-1)(x+1)} = +\infty$ (car $x-1 \rightarrow 0^+$ et $x+1 \rightarrow 2$).

Donc la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote à la courbe \mathcal{C} .

On a aussi : $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{(x-1)(x+1)} = -\infty$ (car $x-1 \rightarrow -2$ et $x+1 \rightarrow 0^+$).

Donc la droite d'équation $x = -1$ est une asymptote à la courbe \mathcal{C} .



2. Asymptote parallèle à l'axe des abscisses

Soit f une fonction et \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan
 La droite d'équation $y = b$ ($b \in \mathbb{R}$) est une asymptote à la courbe \mathcal{C}
 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$

Remarque

Le signe de $f(x) - b$ permet de déterminer la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

⚡ Exemple

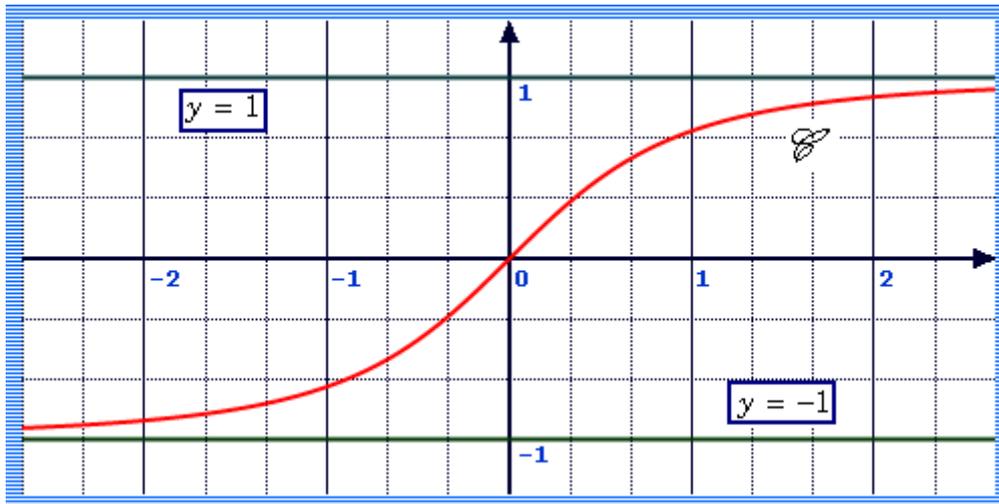
Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = 1$, donc la droite d'équation $y = 1$ est

une asymptote à la courbe \mathcal{C} représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$.

On a aussi : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = -1$

Donc la droite d'équation $y = -1$ est une asymptote à la courbe \mathcal{C} au voisinage de $-\infty$.



3. Asymptote oblique

Soit f une fonction et \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan
 La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote à la courbe \mathcal{C}
 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (ax + b) = 0$

Remarque

Le signe de $f(x) - (ax + b)$ permet de déterminer la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

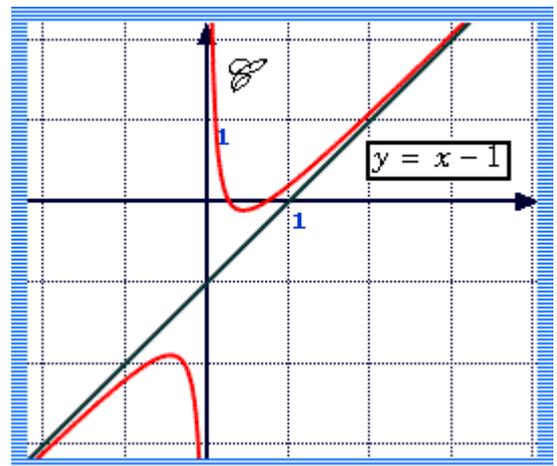
⚡ Exemple 1

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par :

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{5x}$$

$$\text{On a : } \lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 1) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{1}{5x} = 0,$$

donc la droite d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à la courbe \mathcal{C} représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$



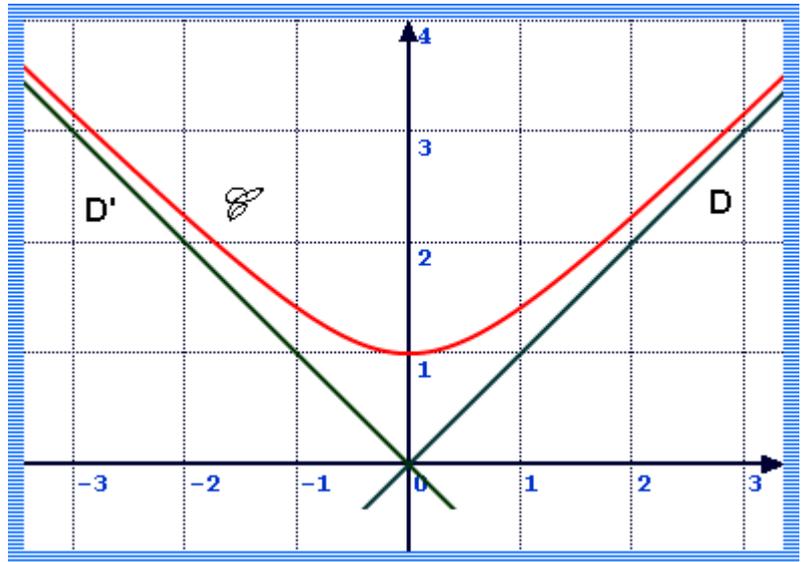
⚡ Exemple 2

Soit f la fonction définie

$$\text{sur } \mathbb{R} \text{ par : } f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

On a : pour tout réel x non nul

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x^2 + 1} = |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \\
&= |x| + |x| \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1 \right) \\
&= |x| + \frac{|x| \frac{1}{x^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} \\
&= |x| + \frac{1}{|x| \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)}
\end{aligned}$$



Pour $x > 0$ on a : $f(x) - x = \frac{1}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 0$, donc la droite D

d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

Pour $x < 0$ on a : $f(x) + x = \frac{1}{-x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = 0$, donc la droite D'

d'équation $y = -x$ est une asymptote à la courbe de f au voisinage de $-\infty$.

4. Etude d'une branche infinie dans le cas où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$

Soit f une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$ et \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère cartésien (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Dans ce qui suit le procédé qu'il faut suivre pour déterminer la branche infinie au voisinage de $+\infty$.

- ❖ Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, alors la courbe \mathcal{C} admet une branche infinie de direction asymptotique celle de (O, \vec{j}) au voisinage de $+\infty$.
- ❖ Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors la courbe \mathcal{C} admet une branche infinie de direction asymptotique celle de (O, \vec{i}) au voisinage de $+\infty$.
- ❖ Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ ($a \neq 0$), alors deux cas peuvent se présenter
 - Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = b$ ($b \in \mathbb{R}$) alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote à la courbe \mathcal{C} au voisinage de $+\infty$.
 - Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = \pm\infty$ alors la courbe \mathcal{C} admet une direction asymptotique celle de la droite d'équation $y = ax$ au voisinage de $+\infty$.

Remarque

Dans le cas où $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm\infty$, l'étude de la branche infinie se fait de la même façon.

III. Continuité et limite d'une fonction composée

1. Continuité de la composée de deux fonctions

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel a et g une fonction définie sur un intervalle ouvert J contenant $f(a)$.

Si f est continue en a et g continue en $f(a)$ alors la fonction $g \circ f$ est continue en a .

Démonstration :

Soit $\varepsilon > 0$, montrons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I$

$$|x - a| < \alpha \Rightarrow |g \circ f(x) - g \circ f(a)| < \varepsilon$$

g est continue en $f(a)$ donc il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $y \in J$

$$|y - f(a)| < \beta \Rightarrow |g(y) - g(f(a))| < \varepsilon \quad (*)$$

f est continue en a donc il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I$

$$|x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \beta \quad (**)$$

soit $x \in I$ tel que $|x - a| < \alpha$ alors d'après $(**)$ $|f(x) - f(a)| < \beta$

Et d'après $(*)$ $|g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$ (en prenant $y = f(x)$)

ou encore $|g \circ f(x) - g \circ f(a)| < \varepsilon$ **cqfd**

Conséquence

Soient f et g sont deux fonctions.

$$\begin{cases} f \text{ continue sur un intervalle } I \\ g \text{ continue sur un intervalle } J \\ f(I) \subset J \end{cases} \Rightarrow g \circ f \text{ continue sur } I$$

Remarque : Si $J = \mathbb{R}$ alors la troisième condition devient inutile.

Exercice 1

Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par : $h(x) = \sin(x^2 - 3x)$.

Montrer que h est continue sur \mathbb{R} .

Solution

Posons $f(x) = x^2 - 3x$. On a : $h(x) = \sin(f(x)) = (\sin \circ f)(x)$ donc $h = \sin \circ f$

La fonction f est une fonction polynôme donc elle est continue sur \mathbb{R} .

La fonction sinus est continue sur \mathbb{R} .

La composée de deux fonctions continues sur \mathbb{R} est une fonction continue sur \mathbb{R} .

Donc h est continue sur \mathbb{R} .

Exercice 2

Soit F la fonction définie sur $]0, 2[$ par : $F(x) = \text{Tan}\left(\frac{(x-1)\pi}{2}\right)$.

Montrer que F est continue sur $]0, 2[$.

Solution

Posons $f(x) = \frac{(x-1)\pi}{2}$ et $g(x) = \text{Tan}x$.

On a : Pour tout $x \in I =]0, 2[$; $F(x) = \text{Tan}(f(x)) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) \Rightarrow F = g \circ f$

• f est continue sur $]0, 2[$ (restriction d'une fonction polynôme).

• g est continue sur $J = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

• $x \in I \Leftrightarrow 0 < x < 2 \Leftrightarrow -1 < x - 1 < 1 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < f(x) < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow f(x) \in J$

Donc $f(I) \subset J$

Les trois conditions sont réalisées donc $F = g \circ f$ est continue sur $]0, 2[$

2. Limite de la composée de deux fonctions

Théorème (Admis)

Soient f et g deux fonctions.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$ alors $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c$ (a, b et c finis ou infinis)

Exercice

Déterminer dans chacun des cas suivants la limite de $h(x)$ quand x tend vers a

1. $h(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $a = +\infty$

2. $h(x) = \frac{\cos((x-1)^2) - 1}{(x-1)^4}$ $a = 1$

Solution

1. Posons $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Pour $x \neq 0$ on a : $h(x) = \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{\sin(f(x))}{f(x)} = g(f(x)) = (g \circ f)(x) \Rightarrow h = g \circ f$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Donc d'après le théorème précédent $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g \circ f(x) = 1$

2. Posons $f(x) = (x - 1)^2$ et $g(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2}$

Pour $x \neq 0$ on a : $h(x) = \frac{\cos(f(x)) - 1}{(f(x))^2} = g(f(x)) = g \circ f(x) \Rightarrow h = g \circ f$.

On a : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^2 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Donc $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g \circ f(x) = \frac{1}{2}$.

IV. Limites et ordre

Théorème (Rappel)

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I sauf peut être en un point $a \in I$.
On a l'implication suivante :

$$\begin{cases} f \text{ admet une limite } l \text{ en } a \ (l \in \mathbb{R}) \\ \text{Pour tout } x \in I \setminus \{a\}, f(x) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow l \geq 0$$

Démonstration

Supposons que $l < 0$

On pose $\varepsilon = \frac{|l|}{2} = -\frac{l}{2} > 0$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Rightarrow$ Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I \setminus \{a\}$;

$$0 < |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Donc pour tout $x \in]a - \alpha, a + \alpha[$ et $x \neq a$ on a $|f(x) - l| < \varepsilon$

$$|f(x) - l| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < f(x) - l < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{l}{2} < f(x) - l < -\frac{l}{2} \Rightarrow f(x) < \frac{l}{2} < 0 \Rightarrow f(x) < 0$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse (Pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, $f(x) \geq 0$)

Donc notre supposition est fautive d'où $l \geq 0$.

cqfd



On peut avoir $l = 0$, même si on a $f(x) > 0$ pour tout $x \in I \setminus \{a\}$

Théorème de compatibilité avec l'ordre

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I sauf peut être en un point $a \in I$.

$$\text{Si on a : } \begin{cases} \text{Pour tout } x \in I \setminus \{a\}; f(x) \leq g(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \mathbb{R} \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l' \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ alors } l \leq l'$$

Ce résultat reste valable lorsque $x \rightarrow a^+$, $x \rightarrow a^-$ ou $x \rightarrow \infty$

Démonstration

Il suffit de considérer la fonction $h = g - f$ et appliquer le théorème précédent.

Conséquence

Soient a , b et l trois réels.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ et pour tout $x \in I \setminus \{a\}$; $a \leq f(x) \leq b$ alors $l \in [a, b]$.

Remarque : On peut avoir $l = a$ ou $l = b$ même si $a < f(x) < b$ pour tout $x \in I \setminus \{a\}$.

Théorème (des gendarmes)

Soient f , g et h trois fonctions définies sur un intervalle ouvert I sauf peut être en un point $a \in I$.

Si on a : $\begin{cases} \text{Pour tout } x \in I \setminus \{a\}; f(x) \leq h(x) \leq g(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l \in \mathbb{R} \end{cases}$ alors $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$

Ce résultat reste valable lorsque $x \rightarrow a^+$, $x \rightarrow a^-$ ou $x \rightarrow \infty$

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$, montrons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I$,

$$0 < |x - a| < \alpha \Rightarrow |h(x) - l| < \varepsilon$$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Rightarrow$ il existe $\alpha_1 > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $0 < |x - a| < \alpha_1 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Donc Pour tout $x \in I$, $0 < |x - a| < \alpha_1 \Rightarrow l - \varepsilon < f(x)$

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l \Rightarrow$ il existe $\alpha_2 > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $0 < |x - a| < \alpha_2 \Rightarrow |g(x) - l| < \varepsilon$

Donc Pour tout $x \in I$, $0 < |x - a| < \alpha_2 \Rightarrow g(x) < l + \varepsilon$

Posons $\alpha = \inf(\alpha_1, \alpha_2)$

Soit $x \in I$ tel que $0 < |x - a| < \alpha$, donc $\begin{cases} 0 < |x - a| < \alpha_1 \\ 0 < |x - a| < \alpha_2 \end{cases}$ (car $\alpha \leq \alpha_1$ et $\alpha \leq \alpha_2$)

D'où $l - \varepsilon < f(x)$ et $g(x) < l + \varepsilon$

En plus on a : pour tout $x \in I \setminus \{a\}$; $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ ce qui permet de dire :

Pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, $0 < |x - a| < \alpha \Rightarrow l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon$

ou encore $0 < |x - a| < \alpha \Rightarrow |h(x) - l| < \varepsilon$ **cqfd**

Exercice

Soit la fonction f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x - \sin x}{2x + \cos x}$

1) Montrer que pour tout réel $x \geq 1$; $\frac{x-1}{2x+1} \leq f(x) \leq \frac{x+1}{2x-1}$.

2) En déduire la limite de f en $+\infty$.

Solution

1) On sait que pour tout réel $x \geq 1$ on a : $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc $-1 \leq -\sin x \leq 1$
 $-1 \leq -\sin x \leq 1 \Leftrightarrow x - 1 \leq x - \sin x \leq x + 1$

De même, on a : $-1 \leq \cos x \leq 1$

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow 2x - 1 \leq 2x + \cos x \leq 2x + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2x+1} \leq \frac{1}{2x+\cos x} \leq \frac{1}{2x-1}$$

Pour $x \geq 1$ on a :

$$\begin{cases} 0 \leq x-1 \leq x - \sin x \leq x+1 \\ 0 < \frac{1}{2x+1} \leq \frac{1}{2x+\cos x} \leq \frac{1}{2x-1} \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{2x+1} \leq f(x) \leq \frac{x+1}{2x-1}$$

2) On a :
$$\begin{cases} \text{Pour tout réel } x \geq 1 ; \frac{x-1}{2x+1} \leq f(x) \leq \frac{x+1}{2x-1} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc d'après le théorème précédent $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

Conséquence

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I sauf peut être en un point $a \in I$.

Si on a :
$$\begin{cases} \text{Pour tout } x \in I \setminus \{a\}, |g(x)| \leq f(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \end{cases} \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

Ce résultat reste valable lorsque $x \rightarrow a^+$, $x \rightarrow a^-$ ou $x \rightarrow \infty$

Exemple

Montrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

On a $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $|\sin x| \leq 1$ donc $\left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|}$

Et puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{|x|} = 0$, on peut conclure que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

Théorème

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I sauf peut être en un point $a \in I$.

Si on a :
$$\begin{cases} \text{Pour tout } x \in I \setminus \{a\}, f(x) \leq g(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \end{cases} \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$$

Ce résultat reste valable lorsque $x \rightarrow a^+$, $x \rightarrow a^-$ ou $x \rightarrow \infty$

Démonstration

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \Rightarrow$ Il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in I, 0 < |x-a| < \alpha \Rightarrow f(x) > 1 > 0$

On a :
$$\begin{cases} \forall x \in I \cap]a-\alpha, a+\alpha[\setminus \{a\}, 0 < \frac{1}{g(x)} \leq \frac{1}{f(x)} \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0 \end{cases}$$

Alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = 0$. En plus $g(x) > 0$ dans $I \cap]a-\alpha, a+\alpha[\setminus \{a\}$

Donc $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$. **cqfd**

Théorème

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I sauf peut être en un point $a \in I$.

Si on a : $\begin{cases} \text{Pour tout } x \in I \setminus \{a\}, f(x) \leq g(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty \end{cases}$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

Ce résultat reste valable lorsque $x \rightarrow a^+$, $x \rightarrow a^-$ ou $x \rightarrow \infty$

Démonstration

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty \Rightarrow$ Il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in I, 0 < |x - a| < \alpha \Rightarrow g(x) < -1 < 0$

On a : $\begin{cases} \forall x \in I \cap]a - \alpha, a + \alpha[\setminus \{a\}, \frac{1}{g(x)} \leq \frac{1}{f(x)} < 0 \Rightarrow 0 < -\frac{1}{f(x)} \leq -\frac{1}{g(x)} \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = 0 \end{cases}$

Terminer la démonstration.

Exercice

Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} + \sin\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$

V. Image d'un intervalle par une fonction continue

Théorème (Rappel)

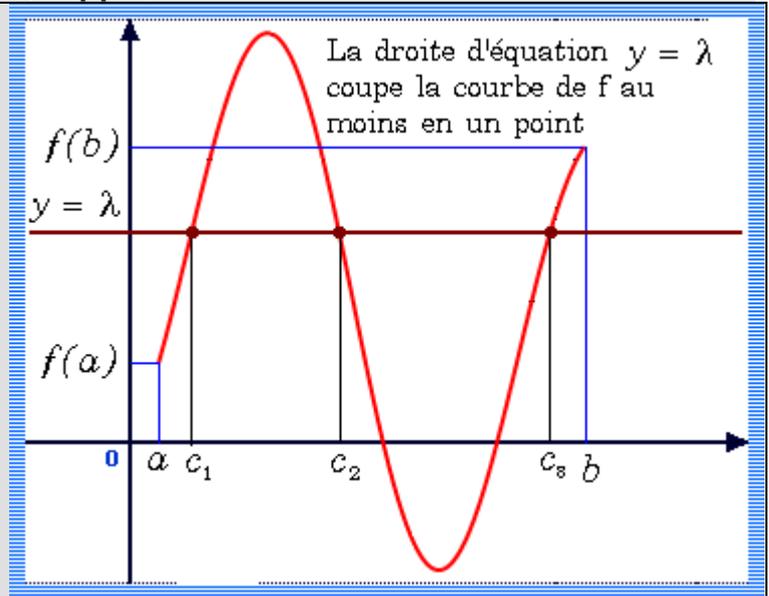
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

Théorème des valeurs intermédiaires (Rappel)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .
Soient a et b deux réels de I tels que $a < b$.
Pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe (au moins) un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$.
Autrement dit, l'équation $f(x) = \lambda$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a, b]$.

Cas particulier

Si $f(a) \cdot f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]a, b[$.



Remarque

Si f est strictement monotone sur l'intervalle I alors c est unique.

Exercice

- 1) Montrer que l'équation $x^3 + 2x + 1 = 0$ admet une solution α dans l'intervalle $]-1, 0[$
- 2) Vérifier que α est la seule solution réelle de cette équation.
- 3) Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

Solution

Posons $f(x) = x^3 + 2x + 1$

- 1) f continue sur \mathbb{R} (fonction polynôme) et en particulier sur $[-1, 0]$. En plus $f(-1) \cdot f(0) = (-2) \times 1 = -2 < 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans l'intervalle $]-1, 0[$.
- 2) f est dérivable sur \mathbb{R} (fonction polynôme) et pour tout réel x on a :
 $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0 \Rightarrow f$ est strictement croissante sur \mathbb{R} .
Donc α est l'unique solution réelle de l'équation $f(x) = 0$.

❖ Calculons $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ car $\left(-\frac{1}{2}\right)$ centre de l'intervalle $]-1, 0[$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = -\frac{1}{8} < 0. \text{ On a : } f(0) \cdot f\left(-\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow \alpha \in \left]-\frac{1}{2}, 0\right[$$

❖ Calculons $f\left(-\frac{1}{4}\right)$ car $\left(-\frac{1}{4}\right)$ centre de l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}, 0\right[$.

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{1}{4}\right)^3 + 2\left(-\frac{1}{4}\right) + 1 = \frac{31}{64} > 0.$$

$$\text{On a : } f\left(-\frac{1}{4}\right) \cdot f\left(-\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow \alpha \in \left]-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right[$$

❖ Calculons alors $f\left(-\frac{3}{8}\right)$ car $\frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{2} = -\frac{3}{8}$

$$f\left(-\frac{3}{8}\right) = \left(-\frac{3}{8}\right)^3 + 2\left(-\frac{3}{8}\right) + 1 = \frac{-27 - 384 + 512}{512} > 0 \Rightarrow \alpha \in \left]-\frac{1}{2}, -\frac{3}{8}\right[$$

❖ Calculons $f\left(-\frac{7}{16}\right)$ car $\frac{-\frac{1}{2} - \frac{3}{8}}{2} = -\frac{7}{16}$.

$$f\left(-\frac{7}{16}\right) = \left(-\frac{7}{16}\right)^3 + 2\left(-\frac{7}{16}\right) + 1 = \frac{-343 - 3584 + 4096}{4096} > 0$$

$$f\left(-\frac{7}{16}\right) \cdot f\left(-\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow \alpha \in \left]-\frac{1}{2}, -\frac{7}{16}\right[$$

$\left(-\frac{7}{16}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} < 0,1$ donc tout réel de l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}, -\frac{7}{16}\right[$ est une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

Cette méthode est appelée **Méthode de dichotomie**

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert I .

Si f ne s'annule en aucun point de I alors elle garde un signe constant sur I .

Démonstration

Supposons que f ne garde pas un signe constant sur I alors il existe deux réels a et b de I tels que $a < b$ et $f(a) \cdot f(b) < 0$

$$\begin{cases} f \text{ continue sur } [a,b] \\ f(a) \cdot f(b) < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{il existe } c \in]a,b[\text{ tel que } f(c) = 0$$

Ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

Théorème

L'image d'un intervalle fermé borné $[a,b]$, par une fonction continue, est un intervalle fermé borné $[m,M]$.

m est appelé le minimum de f sur $[a,b]$, on note $m = \min f$

M est appelé le maximum de f sur $[a,b]$, on note $M = \max f$

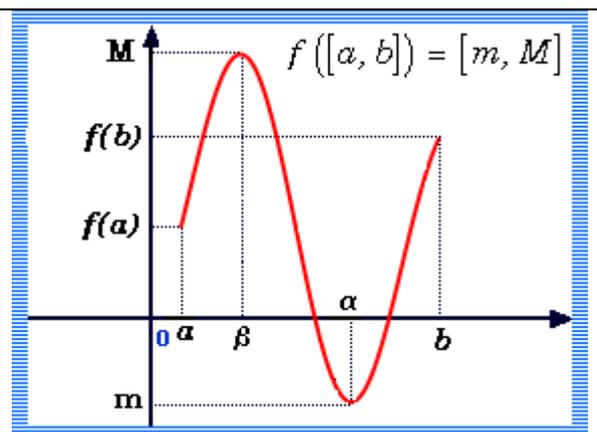
$$m \in [m, M] = f([a, b])$$

$$\Rightarrow \text{il existe } \alpha \in [a,b] \text{ tel que } f(\alpha) = m$$

$$M \in [m, M] = f([a, b])$$

$$\Rightarrow \text{il existe } \beta \in [a,b] \text{ tel que } f(\beta) = M$$

On dit que la fonction f est bornée et qu'elle atteint ses bornes.



VI. Image d'un intervalle par une fonction monotone

Théorème (Admis)

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a,b[$ (b fini ou infini).

- ❖ Si f est croissante et majorée sur $[a,b[$ alors f admet une limite finie en b .
- ❖ Si f est croissante et non majorée sur $[a,b[$ alors f tend vers $+\infty$ en b .
- ❖ Si f est décroissante et minorée sur $[a,b[$ alors f admet une limite finie en b .
- ❖ Si f est décroissante et non minorée sur $[a,b[$ alors f tend vers $-\infty$ en b .

Exercice

Soit f une fonction définie et croissante sur \mathbb{R}_+ telle que pour tout entier naturel n , $f(n) = n+1$. Etudier la limite de f en $+\infty$.

Solution

Montrons que f n'est pas majorée, pour cela il faut montrer que pour tout réel positif M , il existe $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x) > M$.

Soit $M > 0$. Posons $x = E(M) \in \mathbb{N}$ (partie entière de M)

On a $f(x) = x + 1 = E(M) + 1 > M$.

f est croissante et non majorée donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Images d'intervalles par une fonction monotone

Dans ce qui suit, a et b sont deux réels et f une fonction définie sur l'intervalle I .

$f(I)$	f croissante sur I	f décroissante sur I
$f([a, b])$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$f([a, b[)$	$[f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$]\lim_{x \rightarrow b^-} f(x), f(a)]$
$f(]a, b])$	$]\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), f(b)]$	$[f(b), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$
$f(]a, b[)$	$]\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$]\lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$
$f([a, +\infty[)$	$[f(a), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$	$]\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(a)]$
$f(]-\infty, b])$	$]\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(b)]$	$[f(b), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[$
$f(]a, +\infty[)$	$]\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$	$]\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$
$f(]-\infty, b[)$	$]\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$]\lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[$

Remarque : L'image d'un intervalle par une fonction strictement monotone est un intervalle de même nature.

Copyright © Dhaouadi Nejib 2009 - 2010

<http://www.sigmaths.co.cc>

