

Fonctions réciproques

Définition

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et f une fonction définie sur I .
On dit que f réalise une bijection de I sur $f(I)$ (où f est une bijection de I sur $f(I)$), si pour tout y de $f(I)$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans I .

Théorème

si f est une fonction strictement monotone sur un intervalle I , alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$.

Définition

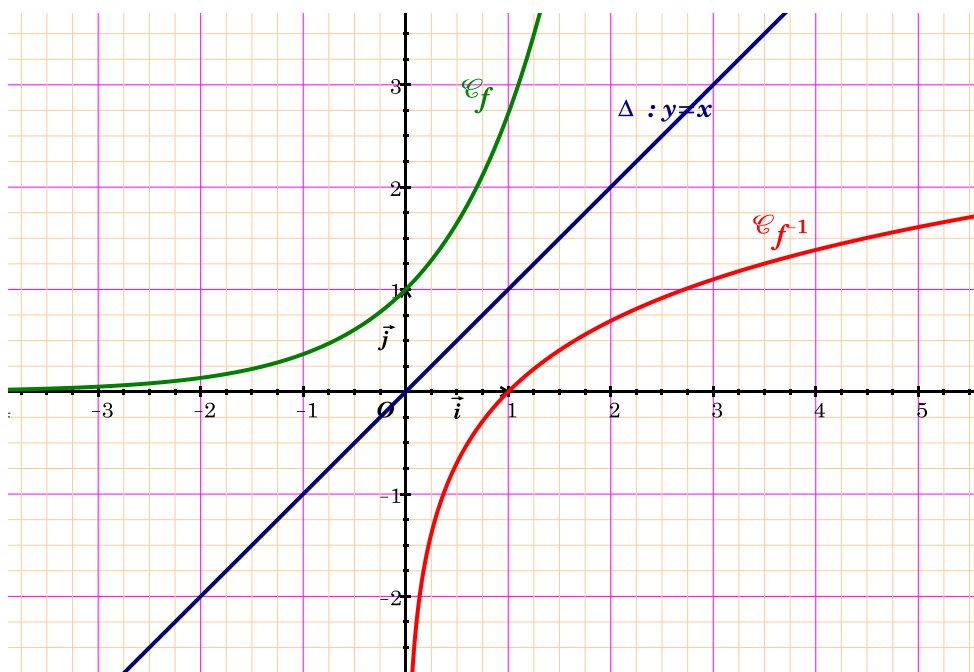
Soit f une bijection d'un intervalle I sur $f(I)$. On appelle fonction réciproque de f et on note f^{-1} la fonction définie sur $f(I)$ qui à tout y de $f(I)$, associe l'unique solution dans I de l'équation $f(x) = y$

Conséquence

Soit f une bijection d'un intervalle I sur $f(I)$ et f^{-1} sa fonction réciproque.
Pour tout x de I et tout y de $f(I)$, $f(x) = y$, si et seulement si, $f^{-1}(y) = x$.
 $f^{-1} \circ f(x) = x$, pour tout x de I et $f \circ f^{-1}(y) = y$, pour tout y de $f(I)$.

Conséquence

Les courbes respectives d'une bijection f et de sa réciproque f^{-1} dans un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la droite $\Delta : y = x$



Théorème

si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors sa réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$ et varie dans le même sens que f .

Théorème

Soit f une fonction strictement monotone d'un intervalle I sur $f(I)$, a un réel de I et $b = f(a)$.

Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en b et

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Ce résultat reste valable lorsqu'il s'agit de dérivée à droite ou à gauche en a .

Corollaire

soit f une bijection d'un intervalle I sur $f(I)$.

Si f est dérivable sur I et $f'(x) \neq 0$ pour tout x de I , alors f^{-1} est dérivable sur

$f(I)$ et $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$, pour tout y de $f(I)$.

Théorème et définition

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

La fonction $x \mapsto x^n$ réalise une bijection de \mathbb{R}_+ sur \mathbb{R}_+ . Elle admet une fonction réciproque strictement croissante de \mathbb{R}_+ sur \mathbb{R}_+ , appelée fonction racine $n^{\text{ième}}$.

L'image d'un réel positif x par la fonction racine $n^{\text{ième}}$ est noté $\sqrt[n]{x}$ se lit

“ racine $n^{\text{ième}}$ de x ”. lorsque $n = 2$ et pour x positif $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$.

Conséquence

- Pour tous réels positifs x et y , $y = x^n$, si et seulement si, $x = \sqrt[n]{y}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

Conséquence

Soit deux entiers n et p tels que $n \geq 2$ et $p \geq 2$ et deux réels positifs a et b .

Alors

$$\sqrt[n]{a^n} = a \quad (\sqrt[n]{a})^n = a \quad \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^p} \quad (\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p} \quad \sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n \cdot p]{a}$$

Théorème

Pour tout entier $n \geq 2$ la fonction $f: x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

De plus $f'(x) = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x^{n-1}})}$, pour tout $x > 0$.

Théorème

Pour tout entier $n \geq 2$, la fonction $f: x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

De plus $f'(x) = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x^{n-1}})}$, pour tout $x > 0$.

Théorème

Soit u une fonction dérivable et positive sur un intervalle I et un entier $n \geq 2$.

La fonction $f: x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est continue sur I et dérivable en tout réel x de I tel

que $u(x) \neq 0$. De plus $f'(x) = \frac{u'(x)}{n(\sqrt[n]{u(x)^{n-1}})}$, pour tout x de I tel que $u(x) > 0$.



www.masmaths.com