

Dérivabilité

Rappels :

Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I est dérivable en un réel $a \in I$ s'il existe un réel, noté $f'(a)$ tel que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$.

Soit $f: \mapsto a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ une fonction polynôme. La fonction f est dérivable en tout réel x et $f'(x) = n a_n x^{n-1} + \dots + a_1$.

Si f est dérivable en a alors le réel $f(a) + f'(a)h$ est une approximation affine de $f(a + h)$

Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I est dérivable en un a de I , si et seulement si, elle est dérivable à gauche et à droite en a et $f'_g(a) = f'_d(a)$

- Une fonction est dérivable sur un intervalle ouvert I si elle est dérivable en tout réel de I
- Soit deux réels a et b tels que $a < b$. Une fonction est dérivable sur $[a, b]$ si elle est dérivable sur $]a, b[$, à droite en a et à gauche en b
- On définit de façon analogue la dérivabilité d'une fonction sur les intervalles $[a, b[$, $]a, b]$, a et b finis ou infinis

Dérivées des fonctions usuelles :

Fonction f	Intervalle	f'
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$	\mathbb{R}	$x \mapsto n x^{n-1}$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	Tout intervalle inclus dans \mathbb{R}^*	$x \mapsto -n x^{-n-1}$
$x \mapsto \sin(ax + b)$	\mathbb{R}	$x \mapsto a \cos(ax + b)$
$x \mapsto \cos(ax + b)$	\mathbb{R}	$x \mapsto -a \sin(ax + b)$
$x \mapsto \tan(ax + b)$	Tout intervalle inclus dans l'ensemble de définition	$x \mapsto a(1 + \tan^2(ax + b))$

Opérations sur les fonctions dérivables :

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I

Fonction	Intervalle	Fonction dérivée
$f + g$	I	$f' + g'$
$af (a \in \mathbb{R})$	I	af'
$f \times g$	I	$f' \times g + g' \times f$

$\frac{1}{f}$	Tout intervalle inclus dans $\{x \in I, f(x) \neq 0\}$	$-\frac{f'}{f^2}$
$\frac{f}{g}$	Tout intervalle inclus dans $\{x \in I, g(x) \neq 0\}$	$\frac{f'g - g'f}{g^2}$
$f^n, n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$	I	$nf'f^{n-1}$
$\frac{1}{f^n}, n \in \mathbb{N}^*$	Tout intervalle inclus dans $\{x \in I, f(x) \neq 0\}$	$-nf'f^{-n-1}$

I. Dérivées successives

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . La dérivée f' de f est appelée la dérivée première de f . Si la fonction f' est dérivable sur I , sa fonction dérivée est appelée dérivée seconde de f et notée $f^{(2)}$, ou f'' .

Par itération, si la fonction $f^{(n-1)}$ ($n \geq 2$) est dérivable sur I , sa fonction dérivée est appelée dérivée $n^{\text{ème}}$ de f et est notée $f^{(n)}$.

La dérivée $n^{\text{ème}}$ de f est aussi appelée dérivée d'ordre n de f

II. Dérivabilité des fonctions composées

Théorèmes :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel a et g une fonction définie sur un intervalle ouvert J contenant $f(a)$. Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$

Si f est dérivable sur un intervalle I et g est dérivable sur un intervalle J contenant $f(I)$, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g[f(x)]$ pour tout x de I .

III. Théorème des accroissements finis

Théorème de Rolle

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$, alors il existe un réel c de $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Si \mathcal{C}_f est la courbe de f dans un repère (o, \vec{i}, \vec{j}) , alors il existe au moins une tangente à \mathcal{C}_f parallèle à la droite des abscisses.

Théorème des accroissements finis

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie sur $[a, b]$.

- Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe un réel c de $]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$
- Si \mathcal{C}_f est la courbe de f dans un repère (o, \vec{i}, \vec{j}) , alors il existe au moins une tangente à \mathcal{C}_f parallèle à la droite (AB) où A et B sont les points de \mathcal{C}_f d'abscisses respectives a et b .

IV. Inégalité des accroissements finis

Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ ($a < b$) et dérivable sur $]a,b[$.
Soit deux réels m et M . Si $m \leq f'(x) \leq M$ pour tout x de $]a,b[$, alors
 $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

Corollaire

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $M > 0$.
Si $|f'(x)| \leq M$ pour tout x de I , alors $|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|$, pour tous réels a et b de I .

V. Variations d'une fonction

Théorèmes :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si la dérivée de f est strictement positive sur I , alors la fonction f est strictement croissante sur I .
- Si la dérivée de f est strictement négative sur I , alors la fonction f est strictement décroissante sur I .

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si f' est positive et ne s'annule sur aucun intervalle ouvert contenu dans I , alors f est strictement croissante sur I
- Si f' est négative et ne s'annule sur aucun intervalle ouvert contenu dans I , alors f est strictement décroissante sur I .

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

- Si f est croissante (respectivement strictement croissante) sur $]a,b[$ alors f est croissante (respectivement strictement croissante) sur $[a,b]$
- Si f est décroissante (respectivement strictement décroissante) sur $]a,b[$ alors f est décroissante (respectivement strictement décroissante) sur $[a,b]$.

VI. Extrema

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- On dit que f admet un maximum local en a , s'il existe un intervalle ouvert J contenant a et inclus dans I tel que pour tout x de J $f(x) \leq f(a)$.
- On dit que f admet un minimum local en a s'il existe un intervalle ouvert J contenant a et inclus dans I tel que pour tout x de J $f(x) \geq f(a)$.

- Lorsque f admet un minimum local ou un maximum local en a on dit que f admet un extremum local en a .

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

- Si f admet un extremum local en a alors $f'(a) = 0$
- Si $f'(x)$ s'annule en a en changeant de signe alors f admet un extremum local en a .

VII. Point d'inflexion

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et dérivable en un réel a de I et \mathcal{C}_f sa courbe dans un repère orthogonal (o, \vec{i}, \vec{j}) .

On dit que le point $A(a, f(a))$ est un point d'inflexion de \mathcal{C}_f , si \mathcal{C}_f traverse sa tangente en ce point.

le plan est muni d'un repère (o, \vec{i}, \vec{j}) . Soit f une fonction définie sur un ensemble \mathcal{D} , de courbe représentative \mathcal{C} . Soit $A(a, b)$.

Le point A est un centre de symétrie de \mathcal{C} , si pour tout $x \in \mathcal{D}$, $2a - x \in \mathcal{D}$ et $f(2a - x) = 2b - f(x)$.

Théorème

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $]a-h, a+h[$, ($h > 0$) et \mathcal{C}_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

Si la fonction dérivée f'' de f s'annule en a changeant de signe, alors le point $I(a, f(a))$ est un point d'inflexion de la courbe \mathcal{C}_f

