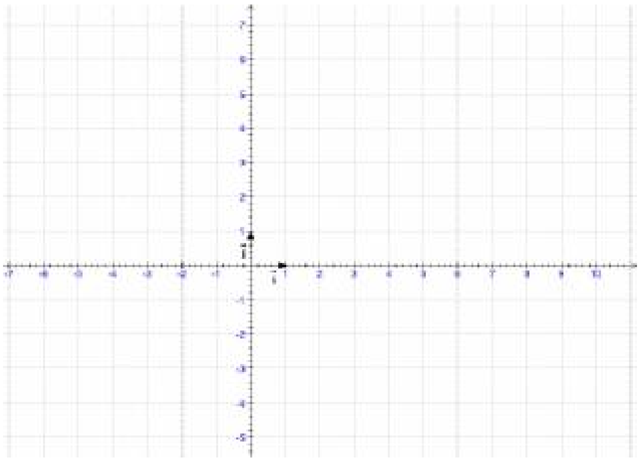
I. Approche de la notion :

Déterminer le domaine de définition et tracer la courbe représentative de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1ér cas : $f(x) = 2x+1$.

$D_f =$

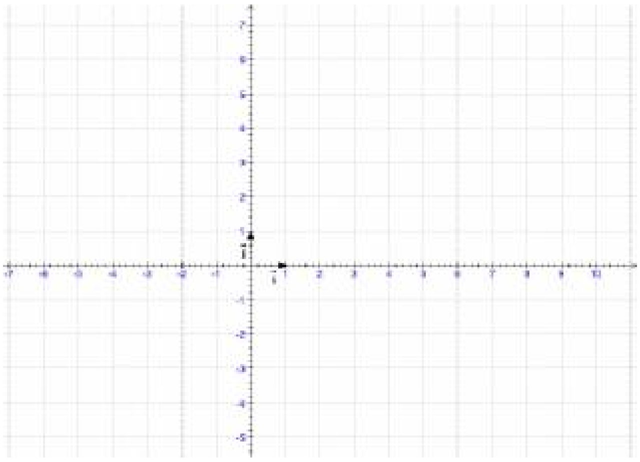
Courbe représentative :



2ème cas : $f(x) = |x|$.

$D_f =$

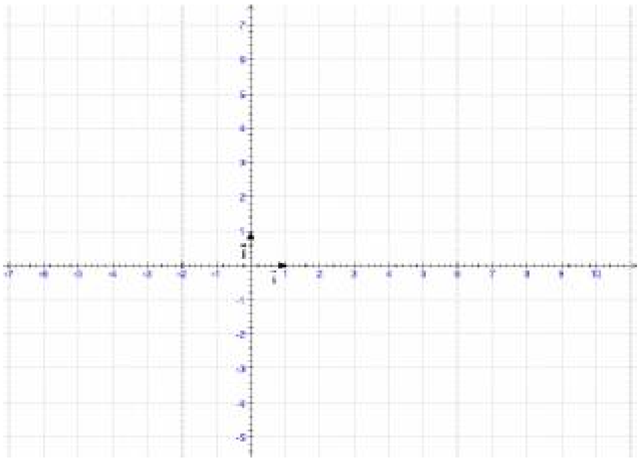
Courbe représentative :



3ème cas : $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & si\ x \geq 0 \\ 2x-1 & si\ x < 0 \end{cases}$.

$D_f =$

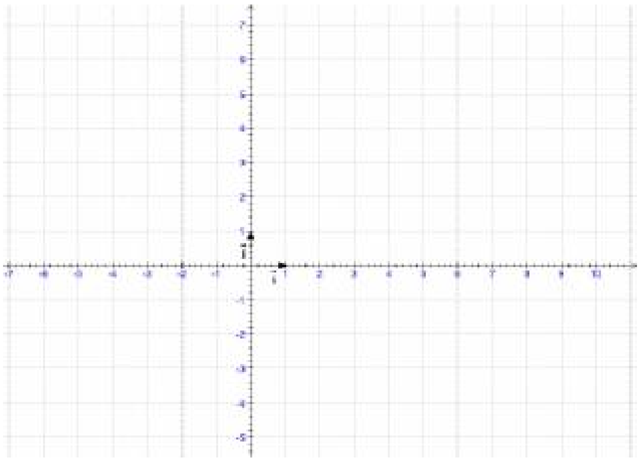
Courbe représentative :



4ème cas : $f(x) = E(x)$ appelée fonction partie entière.

$D_f = \mathbb{R}$.

Courbe représentative sur [-1,3] :



Remarque : Si x est un nombre réel, quelconque, il existe un entier relatif n tel que $n \leq x < n+1$.

Cet entier relatif s'appelle la partie entière de x que nous désignerons par $E(x)$.

Exemple : si $-1 \leq x < 0$ alors $E(x) = -1$.

Commentaires :

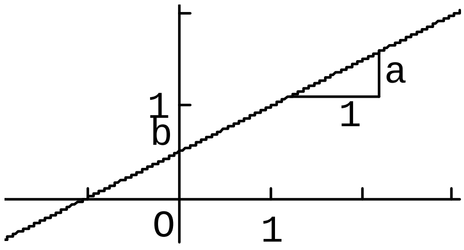
- Pour les deux premiers cas, la fonction est représentée par un trait continu (obtenu sans lâcher le crayon). La fonction considérée est dite une fonction **continue** en tout point de son ensemble de définition.
- Pour les deux derniers cas, la fonction est elle continue en tout point de son domaine de définition ?

………

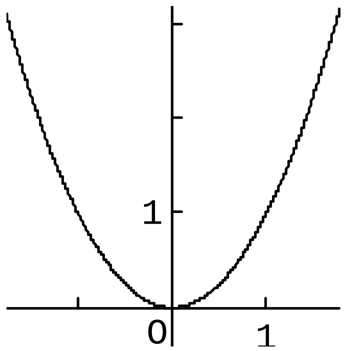
……………………………………………………………………………………

II. Continuité des fonctions usuelles :

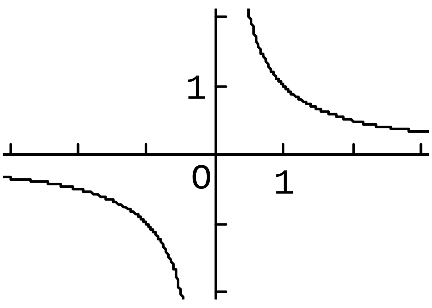
- Toute fonction affine $x \mapsto ax+b$ est continue en tout réel x_0.



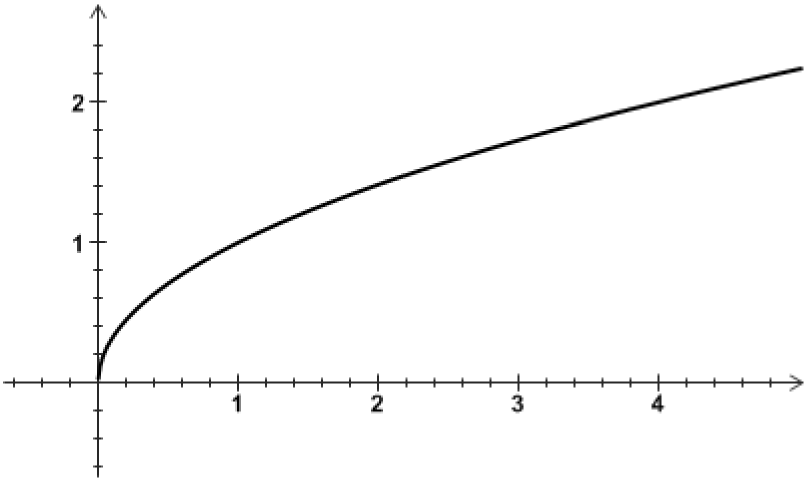
- La fonction carrée $x \mapsto x^2$ est continue en tout réel x_0.



- La fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue en tout réel non nul.



- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en tout réel positif x_0.



- Les fonctions polynômes sont continues en tout réel x_0 .
- Les fonctions rationnelles sont continues en tout réel où elles sont définies.

Activité 2 page 24.

- Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I.
  Si f est continue en x_0, alors $|f|$ est continue en x_0.

Activité 2 page 25.

III. Opérations sur les fonctions continues :

Théorème :

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I. Soit x_0 un réel de I et k un réel.

- Si f et g sont continues en x_0 alors les fonctions f + g, fg, et kf sont continues en x_0.
- Si f est continue en x_0 et si $f(x_0) \neq 0$ alors le fontion $\frac{1}{f}$ est continue en x_0.
- Si f et g sont continues en x_0 et si $g(x_0) \neq 0$ alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue en x_0.

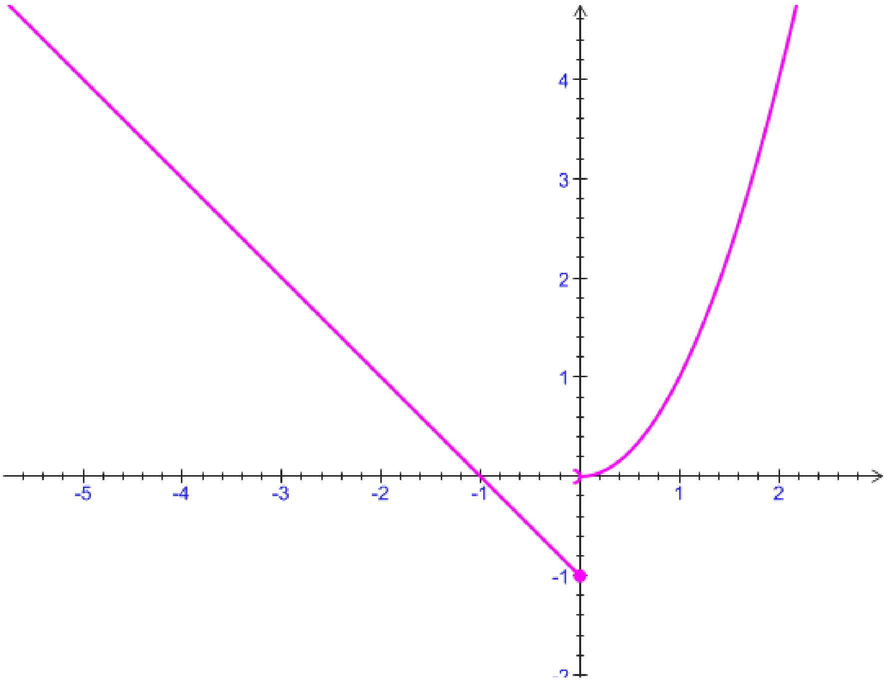
Activité 1 page 25.

- Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I.
  Si f est continue en x_0, alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en x_0.

Activité 3 page 26.

IV. Continuité à droite, continuité à gauche :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 & \textbf{si } x > 0 \\ f(x) = -x-1 & \textbf{si } x \leq 0 \end{cases}$.



- f(0) = - 1.
- Si x devient de plus en plus proche de 0 à gauche (par des valeurs négatives), f(x) devient de plus en plus proche de f(0) = - 1. On dit que f est continue à gauche en 0.
- Si x devient de plus en plus proche de 0 à droite (par des valeurs supérieures), f(x) devient de plus en proche de 0 qui est différent de f(0). On dit que f n'est pas continue à droite en 0 ou que f est discontinue à droite en 0.

  Dans ce cas f n'est pas continue en 0.

Théorème

f est continue en x_0, si et seulement si, f est continue à droite et à gauche en x_0.

V. Continuité sur un intervalle :

- Soient a et b finis ou infinis.

Une fonction définie sur un intervalle $]a,b[$ est dite continue sur $]a,b[$ si elle est continue en tout réel de $]a,b[$.

- Soit a fini ou infini et b un réel.

Une fonction définie sur un intervalle $]a,b]$ est dite continue sur $]a,b]$ si elle est continue en tout réel de $]a,b[$ et continue à gauche en b.

- Soit a un réel et b fini ou infini.

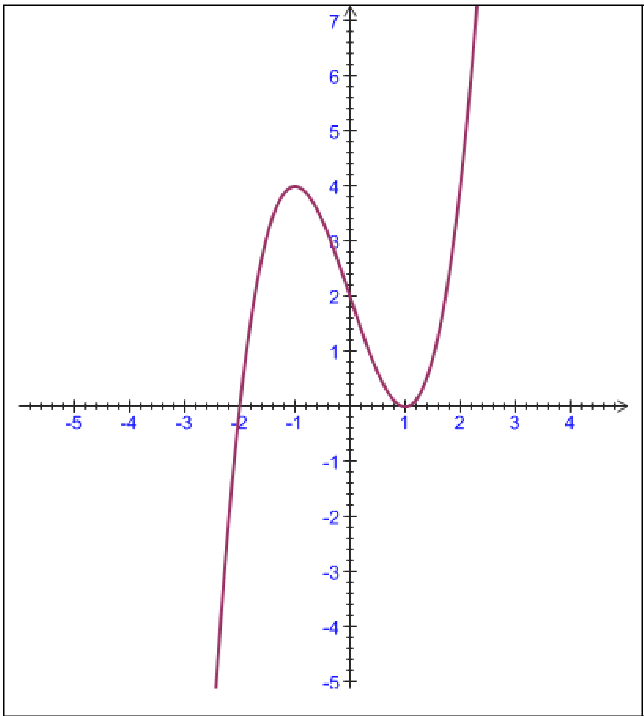
Une fonction définie sur un intervalle $[a,b[$ est dite continue sur $[a,b[$ si elle est continue en tout réel de $]a,b[$ et continue à droite en a.

- Soient a et b deux réels.

Une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$ est dite continue sur $[a,b]$ si elle est continue en tout réel de $]a,b[$,continue à droite en a et continue à gauche en b.

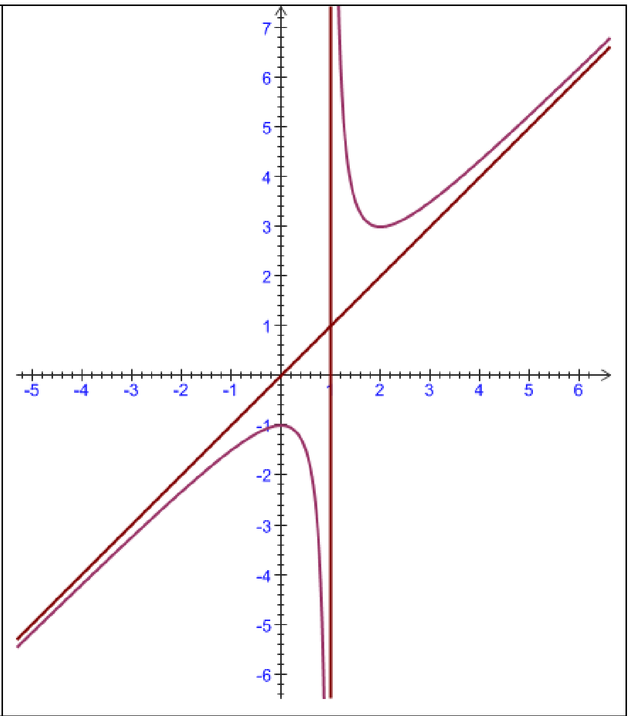
- Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est continue sur son ensemble de définition.

Exemples



$f(x) = x^3 - 3x + 2$

f est continue sur $\mathbb{R}$



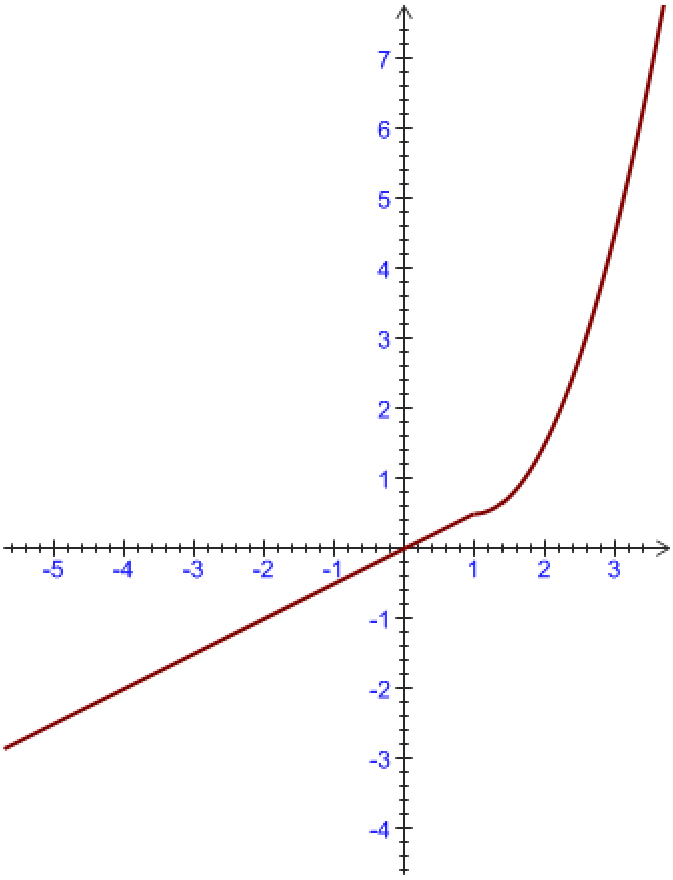
$g(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

g est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

Activité 1 page 29.

$$\begin{cases} g(x) = (x-1)^2 + 0.5 \text{ si } x \geq 1 \\ \boldsymbol{g}|_{]-\infty,1[} \text{ est une fonction linéaire} \\ g \text{ est continue sur } \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = (x-1)^2 + 0.5 \text{ si } x \geq 1 \\ g(x) = ax \quad\quad \text{si } x < 1 \\ g \text{ est continue sur } \mathbb{R} \end{cases}$$

1) Représentation graphique de g :

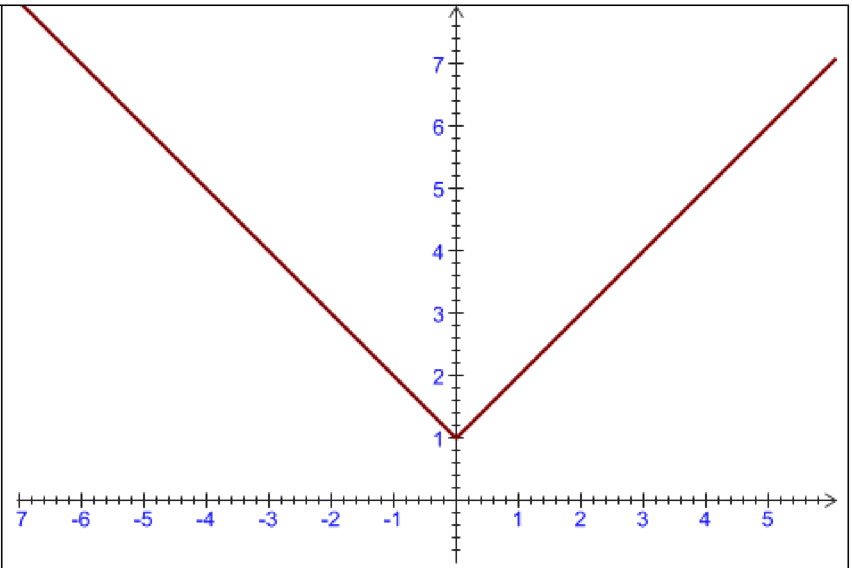
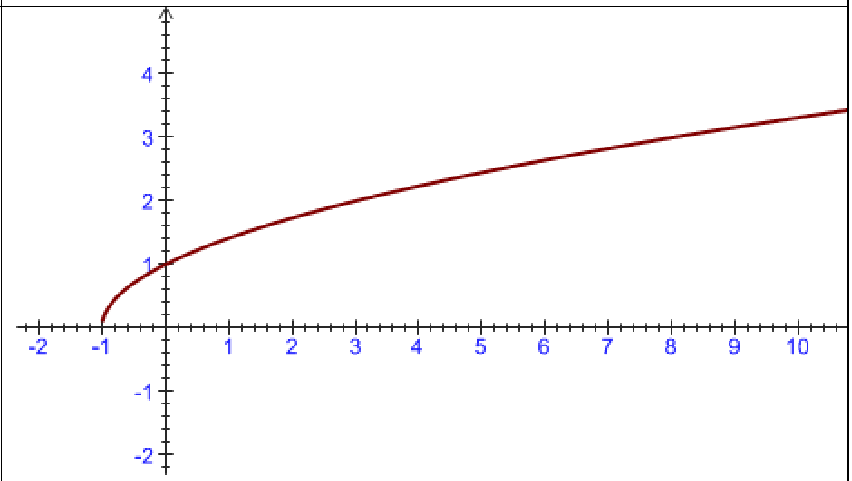
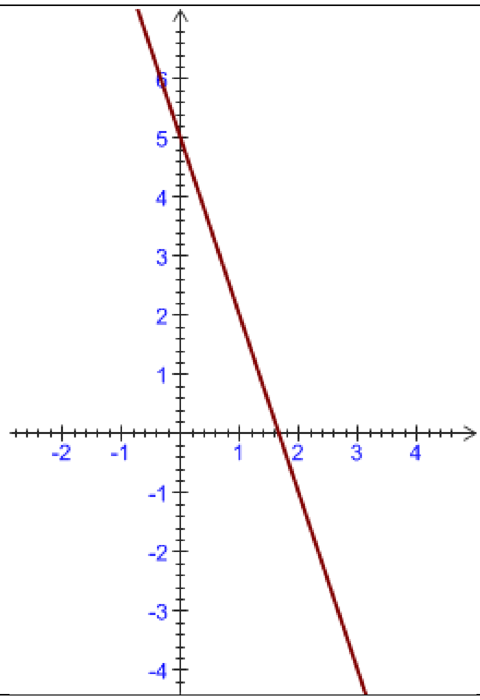


2) g est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier en 1 donc si x devient de plus en proche de 1 (à gauche ou à droite), g(x) devient de plus en proche de g(1) = 0.5.

En tendant vers 1 à gauche, g(x) tend vers a donc a = 0.5

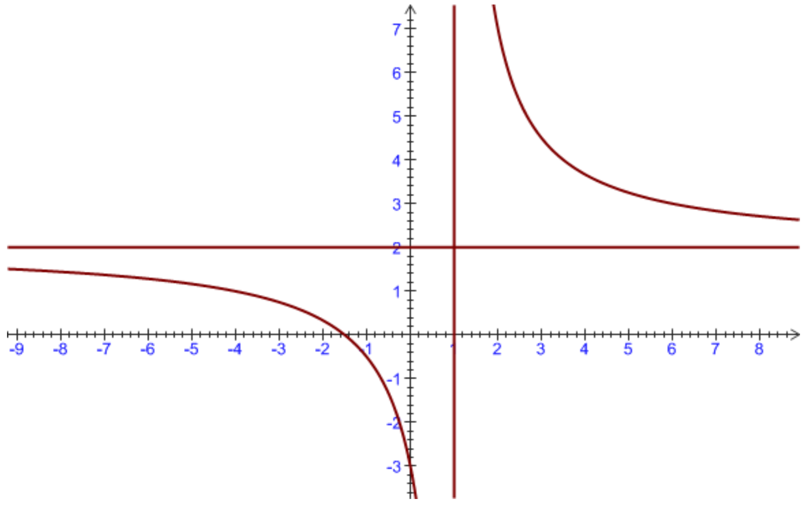
D'où $\begin{cases} g(x) = (x-1)^2 + 0.5 & \text{si } x \geq 1 \\ g(x) = \dfrac{1}{2}x & \text{si } x < 1 \end{cases}$.

Activité 2 page 29.

1) $f : x \mapsto \lvert x \rvert + 1$ f est la somme de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$	
2) $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$ $\left(x \xrightarrow{u} x+1\right)$ est continue et positive sur $\left[-1,+\infty\right[$ donc $f = \sqrt{u}$ est continue sur $\left[-1,+\infty\right[$ en particulier sur [0, 1].	
3) $f : x \mapsto -3\,x + 5$ f est une fonction polynôme continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur]-0.1 ; 10].	

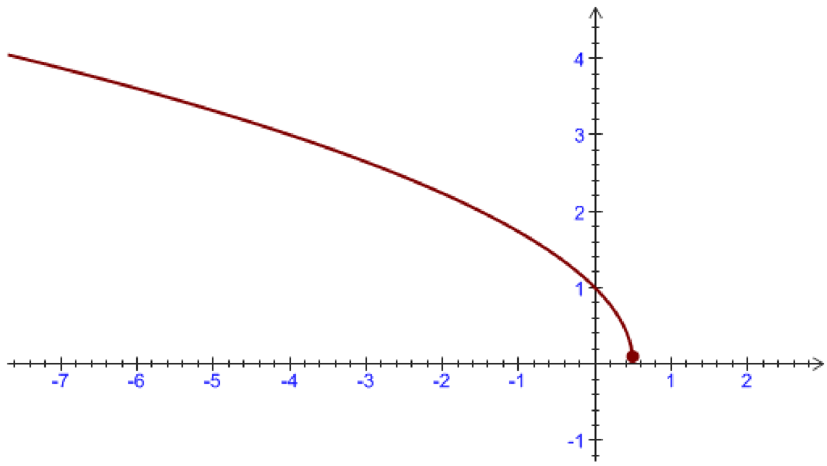
4) $f : x \mapsto \dfrac{2x+3}{x-1}$

f est une fonction rationnelle continue sur son domaine de définition $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ en particulier sur [-1 , 0].



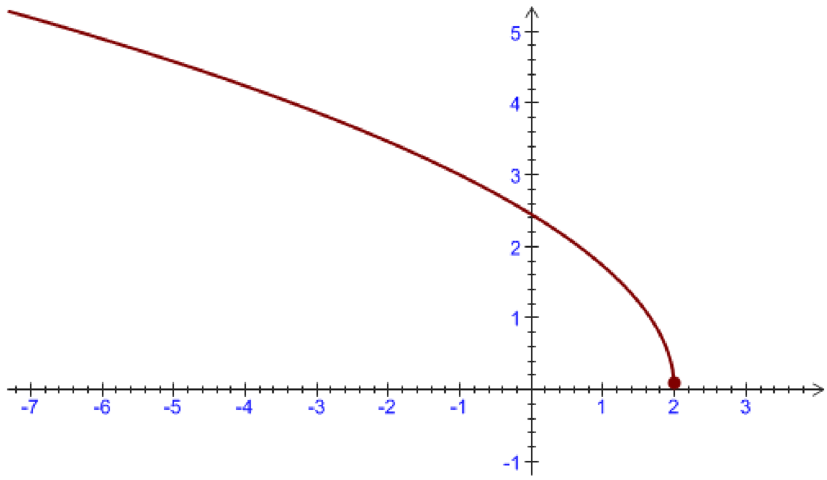
5) $f : x \mapsto \sqrt{-2x+1}$

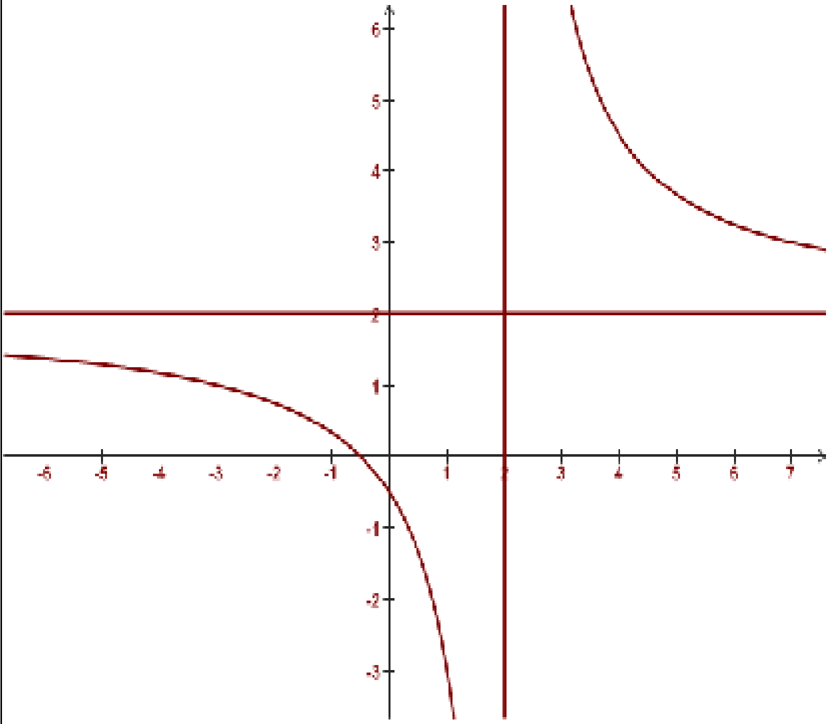
$\left(x \xrightarrow{u} -2x+1\right)$ est continue et positive sur $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right]$ donc $f = \sqrt{u}$ est continue sur $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right]$ en particulier sur] -0.1 ; 0.3].



6) $f : x \mapsto \sqrt{-3x+6}$

$\left(x \xrightarrow{u} -3x+6\right)$ est continue et positive sur $\left]-\infty, 2\right]$ donc $f = \sqrt{u}$ est continue sur $\left]-\infty, 2\right]$.



7) $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x-2}$ f est une fonction rationnelle continue sur son domaine de définition $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ en particulier sur] -2 ; 0 [.	

VI. Image d'un intervalle par une fonction continue :

Activité 1 page 30.

$f : x \mapsto (x-1)^2$.

1) f est une fonction polynôme continue sur $\mathbb{R}$.

2) $f([2,+\infty[) = [1,+\infty[$; $f(]-0.2;0]) = [1;1.44[$

$\{f(x) ; -0.5 \le x \text{ et } x \ne 2\} = [0,1[\cup]1,+\infty[$.

3) $x \in [3,4] \Leftrightarrow 3 \le x \le 4 \Leftrightarrow 2 \le x-1 \le 3 \Leftrightarrow 4 \le (x-1)^2 \le 9 \Leftrightarrow f(x) \in [4,9]$

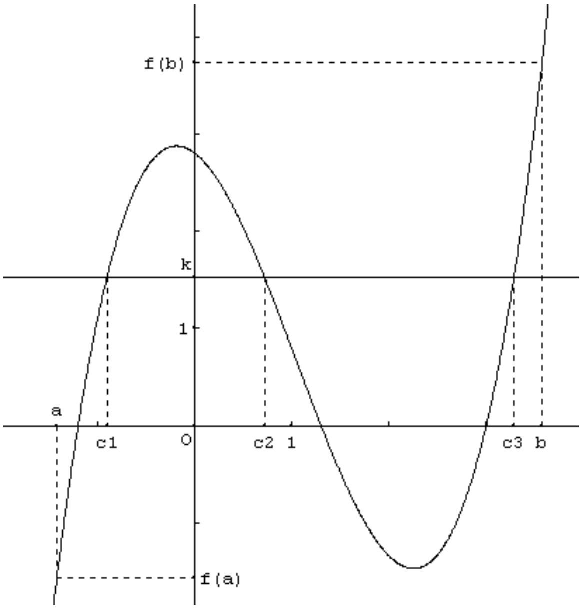
4) L'équation f(x) = 5 admet d'après le graphique deux solutions : une solution α comprise entre -2 et -1 et une solution β comprise entre 3 et 4.

Théorème

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1: Si une fonction f est continue sur un intervalle fermé [*a* ; *b*], et si *k* est un réel quelconque situé entre f(*a*) et f(*b*) (ces deux valeurs comprises), alors il existe au moins un nombre *c* dans [*a* ; *b*] tel que f(*c*) = *k*.



Théorème 2 : Si une fonction f est continue et strictement monotone sur un intervalle fermé [a ; b], alors pour tout réel k situé entre f(a) et f(b) (ces deux valeurs comprises), l'équation f(x) = k admet une **solution unique**.