I. FONCTION DERIVABLE – NOMBRE DERIVE

Soit f une fonction définie sur un intervalle ou sur une réunion d'intervalles deux à deux disjoints et $a \in D_f$

Dire que la fonction f est **dérivable** en a et que **le nombre dérivé** de f en a est le réel L, revient à dire que **le taux de variation** de f en a, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, admet pour limite finie L quand h tend vers 0.

Le nombre dérivé est noté $f'(a)$, et on a : $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Ex : Soit la fonction $f : x \longmapsto x^2$ définie sur IR et a un réel quelconque.

Pour $h \neq 0$, on a :

$t(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = 2a + h$.

Or $\lim_{h \to 0} (2a+h) = 2a$.

Ainsi f est dérivable en a et $f'(a) = 2a$.

AUTRE DEFINITION

Dire que la fonction $h \longmapsto \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a pour limite L en 0, revient à dire que :

pour tout h, proche de 0, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = L + \varphi(h)$, avec $\lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$

c'est à dire $f(a+h) = f(a) + L.h + h.\varphi(h)$, avec $\lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$

Cette écriture est appelée **développement limité** à l'ordre 1 de f en a

Ainsi …

Dire que f est **dérivable** en a, et que son **nombre dérivé** en a est le réel L, signifie que pour tout h suffisamment proche de 0 (c'est à dire au **voisinage de 0**), on peut écrire :

$f(a+h) = f(a) + L.h + h.\varphi(h)$, où φ est une fonction vérifiant $\lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$

Exercice :

Pour tout h , on a : $(a + h)^2 = a^2 + 2 a h + h^2$.

En posant $\varphi (h) = h$, on peut écrire $h^2 = h \varphi (h)$, (on a bien $\lim_{h \to 0} \varphi (h) = 0$.

Ainsi $(a + h)^2 = a^2 + 2 a . h + h . \varphi (h)$, avec $\lim_{h \to 0} \varphi (h) = 0$.

On retrouve que la fonction f de l'exemple précédent est dérivable en a et que $f ' (a) = 2 a$.

Rem : (**dérivable entraîne continue** …)

Lorsque f est dérivable en a , $\lim_{h \to 0} f (a + h) = f (a)$

En effet $\lim_{h \to 0} (L h + h . \varphi (h)) = 0$ …

II. QUELQUES APPLICATIONS

A) TANGENTE EN UN POINT

Un peu d'intuition …

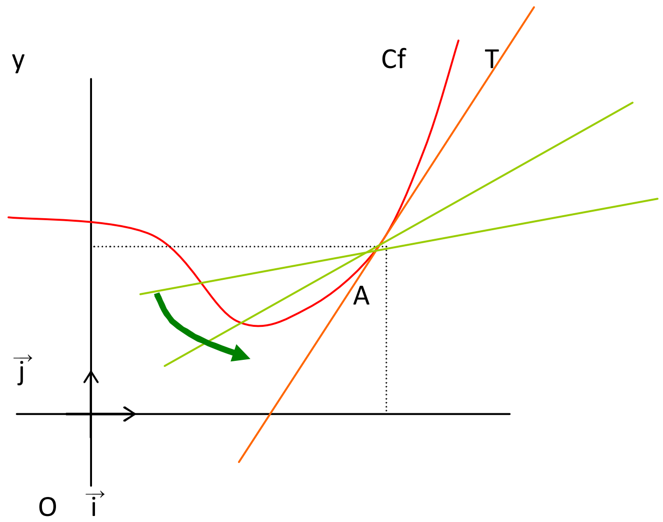
Soit M le point de Cf d'abscisse a + h .

Le coefficient directeur de la droite (AM) est :

$$\frac{f (a + h) - f (a)}{h}$$

Géométriquement, la tangente à Cf au point A se conçoit comme la droite « position limite » des sécantes (AM) lorsque M tend vers A en restant sur la courbe .

Si f est dérivable en a , la « position limite » de ces sécantes a pour coefficient directeur f ' (a) , et passe par A



Si f est dérivable en a, la courbe Cf admet au point A (a ; f (a)) une **tangente** T de coefficient directeur f ' (a) .

Une équation de la tangente en ce point est :

$$y = f ' (a) (x – a) + f (a)$$

T admet une équation de la forme $y = f ' (a) x + p$;

de plus elle passe par A (a ; f (a)) …

Cas particulier important :

- Si f ’ (a) = 0 , Cf admet au point d’abscisse a une tangente parallèle à l’axe des abscisses (tangente horizontale) d’équation y = f (a) .

- Si $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = +\infty$ (ou $-\infty$) , f n’est pas dérivables en a , mais Cf admet une tangente parallèle à l’axe des ordonnées (tangente verticale) d’équation x = a.

B) APPROXIMATION AFFINE LOCALE (admis)

Supposons que f soit dérivable en a . Ainsi on peut écrire f (a + h) = f (a) + f ’ (a) . h + h . φ (h) , avec

$\lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$

De plus la tangente à Cf en A (a ; f (a)) a pour équation y = f ’ (a) (x – a) + f (a)

On considère M et M’ deux points d’abscisse a + h , tels que M ∈ Cf et M’ ∈ T .

M ∈ Cf , donc y_M = f (a + h) M’ ∈ T , donc $y_{M'}$ = f (a) + h f ’ (a) .

Ainsi $\overline{M'M}$ = f (a + h) – f (a) - h f ’ (a) = h . φ (h) .

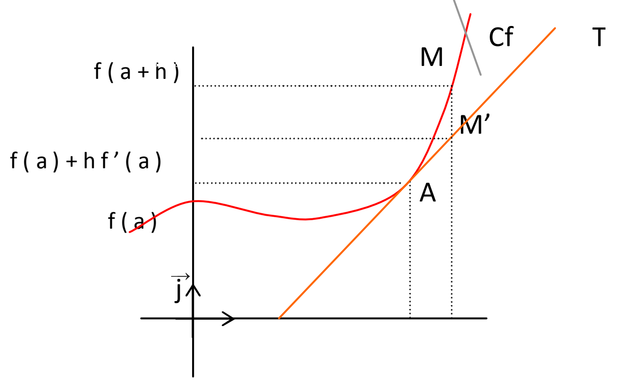
T semble proche de Cf autour du point A

Si h est proche de 0 , alors les points M et M’ sont proches l’un de l’autre et f (a + h) est proche de f (a) + h f ’ (a)

On dit que la fonction h ⟼ f (a) + h f ’ (a) est **la meilleure approximation affine** de la fonction :

h ⟼ f (a + h) au voisinage de 0 .

En remplaçant f (a + h) par f (a) + h f ’ (a) , on commet une erreur égale à h φ (h) .



Remarque :

- La distance MM’ mesure la valeur absolue de l’erreur commise.
- Une autre droite passant par A fournirait une autre approximation affine de f (a + h) , mais celle donnée par la tangente est la meilleure. *(admis …mais intuitif)*

Exercice :

Le nombre dérivé de la fonction f : x ⟼ x^2 en un réel a est f ’ (a) = 2 a

Au voisinage de 0, on a donc $(a + h)^2 \approx a^2 + 2ah$

Par exemple , $(3{,}01)^2 = (3 + 0{,}01)^2$

Ainsi $(3{,}01)^2 \approx 9 + 2 \times 3 \times 0{,}01$, soit $(3{,}01)^2 \approx 9{,}06$

Dans ce cas il est possible de déterminer l'erreur commise ; elle est de h^2 , c'est à dire 0,0001 .

C) UN PEU DE PHYSIQUE : INTERPRETATION CINEMATIQUE DU NOMBRE DERIVE

Un mobile ponctuel se déplace sur un axe.

On note d (t) , la distance qu'il a parcourue à l'instant t . (loi horaire)

Comme vous l'avez peut-être vu en physique, la vitesse instantanée du mobile à l'instant to est la limite des vitesses moyennes
$\dfrac{d(t_o + h) - d(t_o)}{h}$ lorsque h tend vers 0 .
Il s'agit du nombre dérivée en to de la fonction d .

Remarque :

On retrouve ces résultats dans d'autres domaines scientifiques…

Le taux de variation $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ mesure en général la variation moyenne d'une grandeur sur un certain intervalle (débit moyen , coût moyen de production …).

Le nombre dérivé, lui, est une mesure instantanée (débit instantané , coût marginal …) .

III. FONCTIONS DERIVEES

A) DEFINITION

Par extension, f est dérivable sur [a,b] veut dire que f est dérivable sur]a,b[et que f est dérivable à droite en a et gauche en b .

On dit qu'une fonction f est **dérivable** sur un intervalle I ($I \subset D_f$) si pour tout x appartenant à I , le nombre dérivé de f en x existe .

La fonction dérivée de f sur I est la fonction , notée **f '**, qui , à tout x de I , associe le réel f ' (x) .

Cette définition s'étend à une réunion d'intervalles disjoints.

Par abus de langage, on dit que f ' est « la dérivée de f »

Exercice : La fonction $f : x \longmapsto x^2$ est définie et dérivable sur IR et sa fonction dérivée est $f' : x \longmapsto 2x$

On appelle **ensemble de dérivabilité** de la fonction f , l'ensemble sur lequel la fonction dérivée f 'est définie .
Cet ensemble (noté Df ') est toujours inclus dans Df .

B) DERIVEES DE QUELQUES FONCTIONS DE REFERENCE

fonction f	fonction dérivée f ’	ensemble de dérivabilité
$f : x \longmapsto k \ (k \in \mathbb{R})$	$f' : x \longmapsto 0$	$\mathbb{R}$
$f : x \longmapsto x$	$f' : x \longmapsto 1$	$\mathbb{R}$
$f : x \longmapsto \sqrt{x}$	$f' : x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0 ; +\infty[$

Cette fonction n’est pas dérivable en 0

Preuve : (on choisit toujours h , au voisinage de 0 et de telle sorte que f (a + h) soit définie ...ce que l’on ne définira pas à chaque fois)

1) Soit $a \in \mathbb{R}$.

Pour $h \neq 0$, on a : $t(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{k-k}{h} = 0$, donc $\lim_{h \to 0} t(h) = 0$

Ainsi f est dérivable en a et f ’ (a) = 0 , ce qui est vrai pour tout réel a ...

2) Soit $a \in \mathbb{R}$.

Pour $h \neq 0$, $t(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{a+h-a}{h} = 1$, donc $\lim_{h \to 0} t(h) = 1$

Ainsi f est dérivable en a et f ’ (a) = 1 , ce qui est vrai pour tout réel a ...

3)

Si a > 0 .

Pour $h \neq 0$, $t(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \dfrac{\left(\sqrt{a+h} - \sqrt{a}\right) \times \left(\sqrt{a+h} + \sqrt{a}\right)}{h \times \left(\sqrt{a+h} + \sqrt{a}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}$

Or $\lim_{h \to 0} \sqrt{a+h} = \sqrt{a}$, donc $\lim_{h \to 0} t(h) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

Si a = 0

Pour $h > 0$, $t(h) = \dfrac{\sqrt{h}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$, donc $\lim_{h \to 0} t(h) = +\infty$ (ce qui bien sûr n’est pas un réel ...) $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$

Donc f n’est pas dérivable en 0 .

IV. OPERATIONS SUR LES FONCTIONS DERIVABLES

A) SOMME , PRODUIT ...

D représente un intervalle ou une réunion d’intervalles disjoints .

Soit u et v deux fonctions dérivables sur D et k un réel , alors :

- les fonctions k u , u + v et u . v sont dérivables sur D et :

$$(ku)' = ku' \quad , \quad (u+v)' = u' + v' \quad \text{et} \quad (u.v)' = u'.v + u.v'$$

- si pour tout réel a de D , v (a) $\neq$ 0 , les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur D et :

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad , \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$$

Preuve :

1) Soit a $\in$ D

Pour $h \neq 0$, $t(h) = \frac{(ku)(a+h) - (ku)(a)}{h} = k \times \frac{u(a+h) - u(a)}{h}$, donc $\lim_{h \to 0} t(h) = k u'(a)$

Ainsi ku est dérivable en a et (k u) ’ (a) = k u ’ (a) , ce qui est vrai pour tout a $\in$ D ...

2)

Soit a $\in$ D

Pour $h \neq 0$, $t(h) = \frac{(u+v)(a+h) - (u+v)(a)}{h} = \frac{u(a+h) - u(a)}{h} + \frac{v(a+h) - v(a)}{h}$

Or u et v sont dérivables en a , donc $\lim_{h \to 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a)$

et $\lim_{h \to 0} \frac{v(a+h) - v(a)}{h} = v'(a)$

Ainsi u + v est dérivable en a et $\lim_{h \to 0} t(h) = u'(a) + v'(a)$

On en déduit que (u + v)’ (a) = u ’ (a) + v ’ (a) , ce qui est vrai pour tout a $\in$ D ...

3)

Soit a $\in$ D

Pour $h \neq 0$,

$$t(h) = \frac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h} = \dots = \frac{u(a+h) - u(a)}{h} v(a+h) + \frac{v(a+h) - v(a)}{h} u(a)$$

Or u et v sont dérivables en a , donc $\lim_{h \to 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a)$ et $\lim_{h \to 0} \frac{v(a+h) - v(a)}{h} = v'(a$

De plus $\lim_{h \to 0} v(a+h) = v(a)$ ...

4) Soit $a \in D$ pour $h \neq 0$, $t(h) = \dfrac{\dfrac{1}{v(a+h)} - \dfrac{1}{v(a)}}{h} = \dfrac{v(a) - v(a+h)}{h\, v(a)\, v(a+h)} = -\dfrac{v(a+h) - v(a)}{h} \times \dfrac{1}{v(a)\, v(a+h)}$

Or v est dérivable en a , donc $\lim_{h \to 0} \dfrac{v(a+h) - v(a)}{h} = v'(a)$

De plus $\lim_{h \to 0} v(a+h) = v(a)$

Donc $\lim_{h \to 0} t(h) = \dfrac{-v'(a)}{(v(a))^2}$

Ainsi $\left(\dfrac{1}{v(a)}\right)' = \dfrac{-v'(a)}{(v(a))^2}$, ce qui est vrai pour tout $a \in D$ ...

5) $\dfrac{u}{v} = u \times \dfrac{1}{v}$ ...

B) CONSEQUENCES : de nouvelles formules à retenir

fonction f	fonction dérivée f ’	ensemble de dérivabilité
$f : x \longmapsto x^2$	$f' : x \longmapsto 2x$	$\mathbb{R}$
$f : x \longmapsto x^3$	$f' : x \longmapsto 3x^2$	$\mathbb{R}$
$f : x \longmapsto x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$f' : x \longmapsto n x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	$f' : x \longmapsto -\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$
$f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$	$f' : x \longmapsto -\dfrac{2}{x^3}$	$]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$
$f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$f' : x \longmapsto -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

Remarque : Pour $x \neq 0$, on a $\dfrac{1}{x^n} = x^{-n} = x^m$ et $-\dfrac{n}{x^{n+1}} = (-n)\, x^{-n-1} = \ldots = m\, x^{m-1}$ (avec $m = -n$)

Ainsi la dérivée de $f : x \longmapsto x^n$ est vraie pour tout entier n (en n’oubliant pas $x \neq 0$ si $n < 0$)

C) POLYNÔMES ET FONCTIONS RATIONNELLES

Exercice :

deg (P') = deg (P) – 1
si deg (P) > 0

- Soit P le polynôme définie sur IR par $P : x \longmapsto 3x^3 + 5x^2 - x + 3$

P est une somme de fonctions dérivables sur IR , donc P est dérivable sur IR et pour tout réel x :

$P'(x) = 3 \times 3x^2 + 5 \times 2 \times x - 1 + 0 = 9x^2 + 10x - 1$

Toute fonction polynôme est dérivable sur IR

- Soit f la fonction rationnelle définie par $f : x \longmapsto \dfrac{2x^2+1}{x-1}$

On peut écrire $f = \dfrac{u}{v}$ où $u : x \longmapsto 2x^2 + 1$ et $v : x \longmapsto x - 1$

On a $v(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, ainsi $Df = IR - \{1\}$

u et v sont dérivables sur IR donc sur IR – {1} et v ne s'annule pas sur IR – {1}, donc f est dérivable sur IR – {1} e pour tout $x \neq 1$, on a :

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{4x(x-1) - (2x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{4x^2 - 4x - 2x^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 4x - 1}{(x-1)^2}$$

Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.

V. **DERIVEE DE** $f : x \longmapsto g(ax+b)$ (admis)

Soit g une fonction dérivable sur un intervalle I .

Pour tout réel x , tel que $ax + b \in I$, la fonction $f : x \longmapsto g(ax+b)$ est dérivable et : $\mathbf{f'(x) = a\,g'(ax+b)}$

Exercice :

Soit f la fonction définie par $f : x \longmapsto \sqrt{3x+6}$

$3x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$, ainsi $Df = [-2 ; +\infty[$

Pour tout $x \geq -2$, on peut écrire $f(x) = g(3x+6)$ où g est la fonction racine carrée $g : t \longmapsto \sqrt{t}$

La fonction g est dérivable sur] 0 ; + ∞ [et pour tout t > 0 , $g'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$

On a $3x + 6 > 0 \Leftrightarrow x > -2$

Ainsi f est dérivable sur] - 2 ; + ∞ [et pour tout $x > -2$: $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+6}}$