

I. Définitions et vocabulaire :Définition :

Soient a_0, a_1, \dots et a_n des réels.

La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ est appelée fonction polynôme.

Les réels a_0, a_1, \dots et a_n sont appelés les coefficients de la fonction polynôme.

L'écriture $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ est dite la forme réduite et ordonnée du polynôme.

Vocabulaire :

Soit $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, avec $a_n \neq 0$.

L'entier est appelé le degré du polynôme.

On convient que le polynôme nul n'a pas de degré.

a_0 s'appelle le terme constant.

$a_1 x$ s'appelle le terme du premier degré ou le terme en x .

$a_n x^n$ s'appelle le terme de degré n ou le terme en x^n ou le terme du plus haut degré.

Chacun des termes $a_0, a_1 x, \dots, a_{n-1} x^{n-1}$ et $a_n x^n$ est appelé monôme.

Exercice :

Déterminer parmi les fonctions ci-dessous celles qui sont des polynômes :

a) $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x^3 - 5x^2 + 1$

.....

b) $Q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto 1 + \sqrt{3} t + \frac{2}{3} t^2 - 6t^3$

.....

c) $R: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto \frac{3y^2 + 5y - 6}{y^2 + 1}$

.....

d) $S: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto -4z^5 + 6z^3 + \frac{1}{2}z - \sqrt{z}$

.....

e) $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{2}$

.....

Activité 8 page 41.

Opérations sur les fonctions polynômes :

Soit f et g deux polynômes et α un réel.

On appelle somme de f et g le polynôme $f + g$ définie pour tout réel x par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

On appelle produit de f et g le polynôme $f \times g$ définie pour tout réel x par $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$.

On appelle produit du polynôme f par α , le polynôme αf définie pour tout réel x par $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$.

Activité 10 page 42.

Remarque :

$$d^\circ (f + g) = d^\circ (f) + d^\circ (g).$$

II. Racines d'un polynôme – Factorisation d'un polynôme :

Définition :

On dit qu'un réel α est une racine ou un zéro d'un polynôme f si $f(\alpha) = 0$.

Activité 12 page 42.

Théorème :

Soit P un polynôme de degré n supérieur à 1.

- Si α est une racine de P alors il existe un polynôme Q de degré $(n-1)$ tel que pour tout réel x on a $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$; ($n \geq 1$).
- Si α et β sont deux racines de P alors il existe un polynôme Q de degré $(n-2)$ tel que pour tout réel x on a $P(x) = (x - \alpha)(x - \beta)Q(x)$; ($n \geq 2$).
- Plus généralement, si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sont k racines de P alors il existe un polynôme Q de degré $(n-k)$ tel que pour tout réel x on a : $P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\dots(x - \alpha_k)Q(x)$; ($n \geq k$).

Activité 15 page 43.

Exercice n° 1 :

Soit $P(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$.

- a) Calculer $P(2)$.
 - b) En déduire une factorisation de $P(x)$; puis résoudre dans \mathbb{R} , l'équation $P(x) = 0$.
2. Soit $Q(x) = x^4 - 9x^3 + 28x^2 - 36x + 16$.
- a) Vérifier que 1 et 2 sont deux racines du polynôme Q .
 - b) Ecrire $Q(x)$ sous forme d'un produit de deux polynômes de degré 2.
3. On pose $f(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$.
- a) Déterminer D le domaine de définition de f .
 - b) Montrer que pour tout réel $x \in D$, on a : $f(x) = \frac{(x-2)(x-1)}{x+2}$.
 - c) Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$.

Exercice n°2 :

Soit $P(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$

1. Vérifier que 3 est une racine de l'équation : $P(x) = 0$
 2. Trouver les réels a, b et c pour que $P = (x-3)(ax^2 + bx + c)$.
 3. Résoudre alors l'équation : $P(x) = 0$.
 4. En déduire la résolution dans \mathbb{R} de l'équation : $x^6 - 5x^4 - 2x^2 + 24 = 0$.
 5. Soit $Q(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 8x + 32$.
- a) Factoriser Q sachant qu'il admet deux racines opposées.
 - b) Soit $R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$.

Déterminer l'ensemble de définition de $R(x)$ puis résoudre l'inéquation $R(x) \geq 0$.