Chapitre 2 — Problèmes du 1^{er} degré et Problèmes du $2^{ème}$ degré

I –Problèmes du 1^{er} degré - Equations du 1^{er} degré – Inéquations du 1^{er} degré 1

On procède de la manière suivante pour la résolution d'un problème
1 – On détermine l'inconnue
2 – On ramène le problème à la résolution d'une équation (inéquation) du 1^{er} degré à une inconnue
3 – On résout l'équation (inéquation) et on détermine l'ensemble des solutions
4 – On interprète l'ensemble des solutions et on retient que les solutions adéquates
5 – On vérifie les solutions retenues

Exemples :

1 – Déterminer une fraction égale à $\frac{1}{7}$ et telle que la somme du numérateur et du dénominateur soit 200

- On note par x le numérateur de cette fraction
- le dénominateur de la fraction s'écrit $200 - x$, donc on tire $\frac{x}{200-x} = \frac{1}{7}$
- $\frac{x}{200-x} = \frac{1}{7}$ signifie $7x = 200 - x$ d'où 8x=200 alors $x = \frac{200}{8}$ soit $x = 25$
- 25 est la sol° du problème car une fraction, son numérateur est un entier relatif
- On a $\frac{25}{200-25} = \frac{25}{175} = \frac{25\times1}{25\times7} = \frac{1}{7}$
- On conclu que la fraction recherchée est $\frac{25}{175}$

2 – résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation les équations suivantes $\frac{2x+3}{x-1} = \frac{4x}{2x+3}$; $\sqrt{3-2x} = 5$; $|2x+3| = 2$

- L'équation n'a un sens que si et seulement si $x - 1 \neq 0$ *et* $2x + 3 \neq 0$ soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1; -\frac{3}{2}\}$∈

$\frac{2x+3}{x-1} = \frac{4x}{2x+3}$ équivaut $\frac{2x+3}{x-1} - \frac{4x}{2x+3} = 0$ équivaut $\frac{(2x+3)^2-4x(x-1)}{(x-1)(x+4)} = 0$ donc

$(2x+3)^2 - 4x(x-1) = 0$ équivaut $4x^2 + 12x + 9 - 4x^2 + 4x = 0$ équivaut $16x + 9 = 0$

équivaut $x = -\frac{9}{16}$ donc $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{-\frac{9}{16}\}$

- L'équation n'a un sens que si et seulement si $3 - 2x \geq 0$ équivaut $x \leq \frac{3}{2}$ soit $x \in]-\infty, \frac{3}{2}]$

$\sqrt{3-2x} = 5$ équivaut $(\sqrt{3-2x})^2 = 5^2$ équivaut $3 - 2x = 25$ équivaut $x = -11 \in]-\infty, \frac{3}{2}]$ donc $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{-11\}$

- $|2x+3|=2$ équivaut $2x+3=2$ ou $2x+3=-2$ soit $x=-\frac{1}{2}$ ou $x=-\frac{5}{2}$ donc $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}=\{-\frac{1}{2},-\frac{5}{2}\}$

3 – Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes $|x+2|>1$; $\sqrt{5x-4}=\sqrt{x+1}$

- $x+2=0$ équivaut $x=-2$

x	$-\infty$ $\qquad$ -2	$+\infty$
Sig $(x+2)$	$-$	$+$
$\|x+2\|$	$-x-2$	$x+2$

Si $x\in]-\infty,-2]$ on a $-x-2>1$ équivaut $x<-3$ soit $x\in]-\infty,-3[\subset]-\infty,-2]$
Si $x\in]-2,+\infty]$ on a $x+2>1$ équivaut $x>-1$soit $x\in]-1,+\infty[\subset[-2,+\infty[$
On conclu que $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}=]-\infty,-3[\cup]-1,+\infty[$

- $\sqrt{5x-4}=\sqrt{x+1}$ n'a un sens que si et seulement si $5x-4>0$ et $x+1>0$ soit $x>\frac{4}{5}$ et $x>-1$ on conclu que $x\in]\frac{4}{5},+\infty[$

$\sqrt{5x-4}=\sqrt{x+1}$ équivaut $\sqrt{5x-4}^2=\sqrt{x+1}^2$ équivaut $5x-4=x+1$ équivaut $x=\frac{5}{4}\in]\frac{4}{5},+\infty[$ donc $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}=\{\frac{5}{4}\}$

II – Problèmes du second degré – Equations du second degré

1 - Equations du second degré

a – Définition

Soient a,b et c trois réels avec $a\neq 0$. L'équation $ax^2+bx+c=0$ est dite équation du second degré d'inconnue x

b – Forme canonique

$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$est appelée la forme canonique de $ax^2+bx+c=0$

Démonstration :

$$ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]=a\left[x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

c – Discriminant

Le réel b^2-4ac est noté Δ et appelé le discriminant de l'équation du second $ax^2+bx+c=0$

d – Solutions (racines) d'une équation du second degré

Soient a, b et c trois réels avec $a \neq 0$. On pose $f(x) = ax^2 + bx + c$, soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation $f(x) = 0$. On a :

	Les solutions	Factorisation
$\Delta < 0$	L'équation n'a pas de racines dans $\mathbb{R}$	On ne pas factoriser
$\Delta = 0$	L'équation a une seule racine dans $\mathbb{R}$ $x_0 = -\frac{b}{2a}$	$f(x) = a(x - x_0)^2$
$\Delta > 0$	L'équation a deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$ $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Cas particuliers :

*Si on a : a+b+c=0 alors on a $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{c}{a}$

*Si on a : a-b+c=0 alors on a $x_1 = -1$; $x_2 = -\frac{c}{a}$

Démonstration :

$ax^2 + bx + c = 0$ équivaut $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] = 0$ équivaut $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$

On distingue 3 cas : $\Delta < 0$ alors l'équation n'a pas de racines dans $\mathbb{R}$

$\Delta = 0$ alors $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ équivaut $x + \frac{b}{2a} = 0$ soit $x = -\frac{b}{2a}$

$\Delta > 0$ alors $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$ équivaut $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0$ équivaut

$\left(x + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$ équivaut $x + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$ et $x + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$

soit $x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

e – Somme et produit des racines d'une équation du second degré

Soit l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ on suppose quelle admet deux racines distinctes

x_1 et x_2 alors on a la somme de ces deux racines $\mathcal{S} = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ et leur produit $\mathcal{P} = x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$

Dans ce cas l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est équivalente à l'équation $x^2 - \mathcal{S}x + \mathcal{P} = 0$

Démonstration :

*$\mathcal{S} = x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b}{a}$ et $\mathcal{P} = x_1 . x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} . \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$

* $ax^2 + bx + c = 0$ equvalente à $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ équivalente à $x^2 - \mathcal{S}x + \mathcal{P} = 0$

f – Le discriminant réduit

Soient $a, b\ et\ c$ trois réels avec $a \neq 0$ et l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ et tel que $b = 2b'$ alors on a $\Delta = 4\Delta'$ où $\Delta' = b'^2 - ac$ est appelé le discriminant réduit et les

	Les solutions	Factorisation
$\Delta' < 0$	L'équation n'a pas de racines dans $\mathbb{R}$	On ne pas factoriser
$\Delta' = 0$	L'équation a une seule racine dans $\mathbb{R}$ $x_0 = -\frac{b\prime}{a}$	$f(x) = a(x - x_0)^2$
$\Delta' = 0$	L'équation a deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$ $x_1 = \frac{-b'+\sqrt{\Delta\prime}}{a}$; $x_2 = \frac{-b\prime-\sqrt{\Delta\prime}}{a}$	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Démonstration :

$ax^2 + bx + c = 0$ et $b = 2b'$

donc $\Delta = b^2 - 4ac = (2b')^2 - 4ac = 4b'^2 - 4ac = 4(b'^2 - ac) = 4\Delta'$

Si $\Delta < 0$ alors $\Delta' < 0$ et l'équation n'a pas de solutions

Si $\Delta = 0$ alors $\Delta' = 0$ et l'équation a une seule racine $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2b\prime}{2a} = -\frac{b\prime}{a}$

les solutions de l'équation s'écrivent $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b'+\sqrt{4\Delta\prime}}{2a} = \frac{-2b'+2\sqrt{\Delta\prime}}{2a} = \frac{-b'+\sqrt{\Delta\prime}}{a}$

et de même on tire $x_2 = \frac{-b\prime-\sqrt{\Delta\prime}}{a}$

g – Tableau de signe d'une expression de la forme $ax^2 + bx + c$

Soient $a, b\ et\ c$ trois réels avec $a \neq 0$. On pose $f(x) = ax^2 + bx + c$ on obtient le signe de $f(x)$

Qui est en fonction du signe de C et du signe de a

* Si $\Delta \leq 0$ alors on a $f(x)$ a le même signe que a

* Si $\Delta > 0$ on obtient le tableau de signe suivant

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$sig\ f(x)$	$sig\ a$	$sig(-a)$	$sig\ a$	

Démonstration :

* Si $\Delta < 0$ on a $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ or $\Delta < 0$ donc $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$ et alors $f(x)$ a le même signe que a

* Si $\Delta = 0$ on a $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$ or $(x - x_0)^2 \geq 0$ alors $f(x)$ a le même signe que a

* Si $\Delta > 0$ on a $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ on obtient le tableau de signe suivant

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$sig(x - x_1)$	$-$	$+$	$+$	
$sig(x - x_2)$	$-$	$-$	$+$	

$sig(x-x_1)(x-x_2)$	$+$	$-$	$+$
$sig\ f(x)$	$sig\ a$	$sig\ (-a)$	$sig\ a$

Exemples :

Soit l'expression $f(x) = 5x^2 - 3x - 1$

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ $f(x) = 0$
   On a $a = 5$; $b = -3$; $c = 1$ on tire $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 5 \times (-1) = 9 + 20 = 29 > 0$
   donc l'équation admet deux racines distinctes $x_1 = \frac{-(-3)+\sqrt{29}}{2\times 5} = \frac{3+\sqrt{29}}{10}$ et $x_2 = \frac{3-\sqrt{29}}{10}$
2) Factoriser $f(x)$
   $f(x) = 5x^2 - 3x - 1 = 5\left(x - \frac{3+\sqrt{29}}{10}\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{29}}{10}\right)$
3) Déterminer La somme et le produit des racines de $f(x) = 0$
   $\mathcal{S} = x_1 + x_2 = \frac{-(-3)}{5} = \frac{3}{5}$ et $\mathcal{P} = x_1 . x_2 = \frac{-1}{5}$

2 – Equations se ramenant à une équation du second degré

Exemples :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $x + \frac{1}{x} + 2 = 0$; $\frac{x+2}{x-3} = \frac{1}{2x+1}$; $\sqrt{x-2} = x + 1$;

$3x^4 - 5x^2 + 2 = 0$

* $x + \frac{1}{x} + 2 = 0$ n'a un sens que si et seulement si $x \neq 0$ donc l'équation est équivalente à l'équation suivante $\frac{x^2+2x+1}{x} = 0$ équivaut $x^2 + 2x + 1 = 0$ équivaut $(x+1)^2 = 0$ équivaut

$x + 1 = 0$ équivaut $x = -1$ donc $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{-1\}$

* $\frac{x+2}{x-3} = \frac{1}{2x+1}$ n'a un sens que si et seulement si $x - 3 \neq 0$ et $2x + 1 \neq 0$ équivaut $x \neq 3$ et $x \neq -\frac{1}{2}$

$\frac{x+2}{x-3} = \frac{1}{2x+1}$ équivaut $\frac{x+2}{x-3} - \frac{1}{2x+1} = 0$ équivaut $\frac{(x+2)(2x+1)-(x-3)}{(x-3)(2x+1)} = 0$ équivaut

$(x+2)(2x+1) - (x-3) = 0$ équivaut $2x^2 + x + 4x + 2 - x + 3 = 0$ équivaut

$2x^2 + 4x + 5 = 0$ donc $a = 2\ , b' = 2\ et\ c = 5\ soit\ alors \Delta' = 2^2 - 2 \times 5 = 4 - 10 = -6 < 0$

donc $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \emptyset$

* $\sqrt{x-2} = x + 1$ n'a un sens que si et seulement si $x - 2 \geq 0$ et $x + 1 \geq 0$ soit $x \geq 2$ et $x \geq -1$ donc $x \in [2, +\infty[$

$\sqrt{x-2} = x + 1$ équivaut $\left(\sqrt{x-2}\right)^2 = (x+1)^2$ équivaut $x - 2 = x^2 + 2x + 1$ équivaut

$x^2 + x + 3 = 0$ soit $a = b = 1\ et\ c = 3$ donc $\Delta = -11 < 0$ d'où $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \emptyset$

* $3x^4 - 5x^2 + 2 = 0$ on pose $X = x^2$ l'équation s'écrit $3X^2 - 5X + 2 = 0$ soit

$a = 3, b = -5\ et\ c = 2$ alors $\Delta = 1 > 0$ donc l'équation admet deux racines distinctes

$X' = \frac{5+\sqrt{1}}{2\times3} = \frac{6}{6} = 1$ et $X'' = \frac{5-\sqrt{1}}{2\times3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ or $X' = x^2 = 1$équivaut $x = 1$ ou $x = -1$ et $X'' = x^2 = \frac{2}{3}$ équivaut $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ou $x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ d'où $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{1, -1, \sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\}$

3 – Inéquations du second degré

Exemples :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : $(x-1)(-x^2+2) < 0$; $\frac{x^2+3x}{x^2+5x+6} \geq 0$

* $(x-1)(-x^2+2) < 0$; on a $x - 1 = 0$ équivaut $x = 1$ et $-x^2 + 2 = 0$ équivaut $x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$ donc soit le tableau de signe suivant

x	$-\infty$ $\quad$ $-\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$sig(x-1)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$sig(-x^2+2)$	$-$	$+$	$+$	$-$
$sig(x-1)(-x^2+2)$	$+$	$-$	$+$	$-$

On conclu que $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left[-\sqrt{2}, 1\right] \cup \left[\sqrt{2}, +\infty\right[$

* $\frac{x^2+3x}{x^2+5x+6} \geq 0$ a un sens que si et seulement si $x^2 + 5x + 6 \neq 0$ donc la résolution de

$x^2 + 5x + 6 = 0$ où a=1, b=5 et c=6 donne $\Delta = 1$ soit les racines sont $x_1 = -3$ et $x_2 = -2$

On conclu que $\frac{x^2+3x}{x^2+5x+6} \geq 0$ a un sens que pour $x \neq -3$ et $x \neq -2$

$x^2 + 3x = 0$ équivaut $x(x+3) = 0$ équivaut $x = 0$ ou $x + 3 = 0$ équivaut $x = 0$ ou $x = -3$

On dresse le tableau de signe suivant

x	$-\infty$ $\quad$ -3	-2	0	$+\infty$
$sig(x^2+3x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$sig(x^2+5x+6)$	$+$	$-$	$+$	$+$
$sig\left(\frac{x^2+3x}{x^2+5x+6}\right)$	$+$	$+$	$-$	$+$

On tire donc $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} =]-\infty, -3[\cup]-3, -2[\cup [0, +\infty[$

4 - Problèmes du second degré

On procède de la manière suivante pour la résolution d'un problème

1 – On détermine l'inconnue

2 – On ramène le problème à la résolution d'une équation (inéquation) du 2ème degré à une inconnue

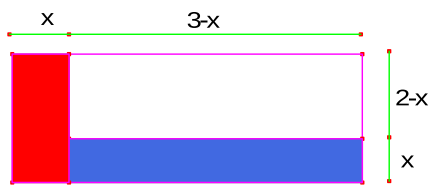
3 – On résout l'équation (inéquation) et on détermine l'ensemble des solutions

4 – On interprète l'ensemble des solutions et on retient que les solutions adéquates

5 – On vérifie les solutions retenues

Exemple :

Un peintre dispose d'un tissu rectangulaire de longueur 3m et de largeur 2m. Sur ce tissu, il veut dessiner deux bandes de même largeur , comme l'indique la figure, de sorte que l'aire des deux bandes soit égale à l'aire de la partie restante. Déterminer la largeur commune convenable.



L'inconnu est la largeur de la bande qu'on note par x

La bande noire a une aire égale à $2x$

La bande Bleu a une aire égale à $(3-x)x$

Le rectangle blanc a une aire égale à $(3-x)(2-x)$

On tire donc $2x+(3-x)x=(3-x)(2-x)$

$2x+(3-x)x=(3-x)(2-x)$ équivaut $2x^2-10x+6=0$ équivaut $x^2-5x+3=0$ on a a=1, b=-5 et c=3 soit $\Delta=13$ alors $x_1=\frac{5+\sqrt{13}}{2}$ et $x_2=\frac{5-\sqrt{13}}{2}$

X représente une distance donc doit être un réel positif et on a x_1 et x_2 sont tous les deux positifs

Car $5>\sqrt{13}$

On vérifie $2\times\frac{5+\sqrt{13}}{2}+\left(3-\frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)\frac{5+\sqrt{13}}{2}=5+\sqrt{13}+\frac{3}{2}(5+\sqrt{13})-\frac{(5+\sqrt{13})^2}{4}=\frac{25}{2}+\frac{5}{2}\sqrt{13}-\frac{19}{2}-\frac{5}{2}\sqrt{13}=3$ c'est l'aire des deux bandes noire et bleu

$\left(3-\frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)\left(2-\frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)=6-5\times\frac{5+\sqrt{13}}{2}+\frac{(5+\sqrt{13})^2}{4}=6-\frac{25}{2}-\frac{5}{2}\sqrt{13}+\frac{19}{2}+\frac{5}{2}\sqrt{13}=3$ c'est l'aire du rectangle blanc