Loi Binomiale:

Une urne contient des boules blanches et des boules noires .La - probabilité de tirer une boule blanche au hasard est égale à p *;* $q=1-p$ *est la probabilité de tirer une boule noire On tire* n *boules au hasard et avec remise ; on étudie la loi de probabilité de la variable aléatoire* X *égale au nombre de boule blanche tirées.*

La variable aléatoire X *peut prendre des valeurs entières comprise entre* 0 *et* n. *Déterminons la probabilité pour que* X *soit égale à* k *.L'univers* Ω *est constitué des suites des résultats des* n *tirages; la probabilité d'une suite correspondant au tirage de* k *boules blanches et* $(n-k)$ *boules noires est égale à* $p^k q^{n-k}$ *, car les tirages sont indépendants (il y a remise de la boule tirée après chaque tirage). Le nombre de suites incompatibles correspondant au tirage de* k *boules blanches est égale au nombre de façons de placer* k *boules parmi* n *: il y en a* C_n^k *est la probabilité cherchée est donc :*

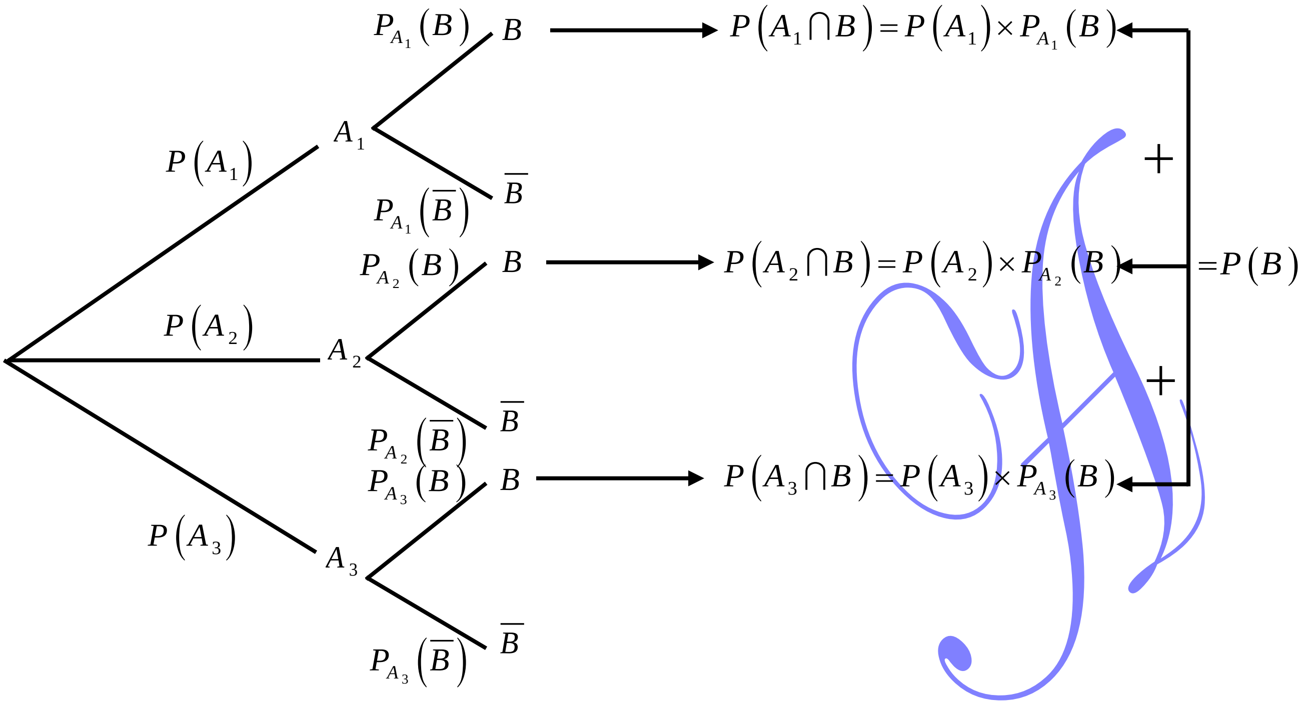
$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ 0 \le k \le n,\ P(X=k)=C_n^k\, p^k\, q^{n-k}}$$

Formule des probabilités totales :

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *sont des évènements non vides deux à deux incompatibles et dont l'union est égale à* Ω *(on dit alors qu'ils forment une partition de l'univers* Ω *) alors pour tout évènement* B *on a :*

$$\boxed{P(B)=P(A_1\cap B)+\cdots+P(A_n\cap B)=P(A_1)\times P_{A_1}(B)+\cdots+P(A_n)\times P_{A_n}(B)}$$

Représentation à l'aide d'un arbre pondéré:



Règle de construction et d'utilisation des arbres pondérés:

- *Sur les premiers branches , on inscrit les* $P(A_i)$.
- *Sur les branches du type* $A_i \to B$ *on inscrit* $P_{A_i}(B)$.
- *Le produit des probabilités inscrites sur chaque branche d'un chemin donne la probabilité de l'intersection des évènements placés sur ce chemin.*
- *La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à* 1 *(Loi des nœuds).*
- *La probabilité d'un évènement* E *est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à* E .

Exemple : *un sac contient des jetions de trois couleurs , la moitié de blancs , le tiers de verts et le sixième de jaunes* 50% *des jetons blancs ,* 30% *des jetons verts et* 40% *des jetons jaunes sont ronds . Tous les-autres jetons sont carrés. On tire au hasard un jeton.*

1/ Construire un arbre pondéré (arbre de choix).

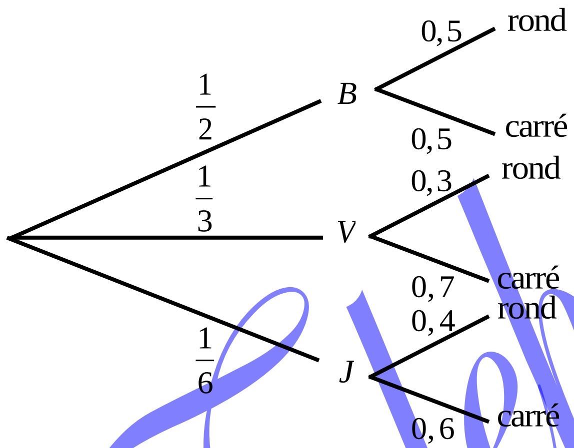
2/ Sachant que le jeton tiré est blanc , quelle est la probabilité pour qu'il soit carré ?

3/ Quelle est la probabilité pour que le jeton tiré soit rond ?

4/ Sachant qu'il est rond , quelle est la probabilité pour qu'il soit blanc

Solution :

1/



2/ La lecture directe de l'arbre nous donne $P_B(C) = 0,5$

3/ $P(R) = \frac{1}{2}\times 0,5 + \frac{1}{3}\times 0,3 + \frac{1}{6}\times 0,4 = \frac{5}{12}$

4/ $P_R(B) = \frac{P(B\cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{2}\times 0,5}{\frac{5}{12}} = \frac{3}{5}$

꧁꧁꧁⁂⁂⁂꧂꧂꧂

Exercice n°01:

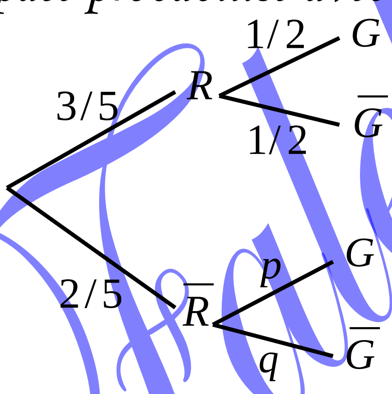
Cocher la réponse juste:

1/ A et B sont deux événements d'un espace probabilisé tels que :

$$P(A\cap B)=\frac{1}{6}\ \text{ et }\ P_A(B)=\frac{1}{4}$$

$$P(A)=\begin{cases}\frac{2}{3} & \square\\ \frac{1}{24} & \square\\ \frac{3}{2} & \square\\ \frac{1}{12} & \square\end{cases}$$

2/ On donne l'arbre pondéré ci-contre où R et G sont deux événements d'un espace probabilisé avec $P(G)=\frac{3}{5}$



$p=\frac{1}{2}$ et $q=\frac{1}{2}$	$p=\frac{3}{4}$ et $q=\frac{1}{4}$	$p=\frac{3}{5}$ et $q=\frac{2}{5}$	$p=\frac{1}{4}$ et $q=\frac{3}{4}$

Exercice n°02:

Une classe de 35 élèves comporte 20 garçons. 12 élèves, dont 5 filles sont des fumeurs.

On choisit, au hasard , un élève dans la classe.Soit les deux évènements suivants:

A :" l'élève choisi est un garçon"

B :" l'élève choisi est un fumeur "

1/ Calculer $P(A)$; $P(B)$ et $P(A \cap B)$.

2/ Calculer la probabilité que l'élève choisi soit un garçon ou un fumeur.

3/ Calculer la probabilité que l'élève choisi soit un garçon qui fume ou une fille qui ne fume pas.

Exercice n°03:

Une urne contient 3 boules rouges et 5 boules blanches . On tire au hasard et simultanément 2 boules de l'urne.

1/ On appelle X la variable aléatoire réelle qui , à chaque tirage de deux boules , associe le nombre de boules blanches obtenues.

Déterminer la loi de probabilité de X .

2/ On appelle Y la variable aléatoire réelle qui , à chaque tirage de deux boules, associe le nombre de boules rouges obtenues.

Déterminer la loi de probabilité de Y .

3/ Soit Z la variable aléatoire réelle définie par $Z = X + Y$

Déterminer la loi de probabilité de Z .

Exercice n°04:

Les questions 1/ et 2/ sont indépendantes.

On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

Une urne U_1 contient 4 jetons blancs et 3 noirs et une urne U_2 contient 17 jetons blancs et 18 noirs.

1/ On jette un dé cubique dont chaque face a la même probabilité d'apparaître. Si le- 6 apparaît , on tire un jeton de l'urne U_1 ,si non on tire un jeton de l'urne U_2.

a) Déterminer la probabilité de tirer un jeton blanc (on considérera les événements :

A :" on a obtenu 6 en jetant le dé "

B :" on obtient un jeton blanc "

b) On a tiré un jeton blanc ; calculer la probabilité pour qu'il provienne de U_1.

c) On a tiré un jeton noir ; calculer la probabilité pour qu'il provienne de U_2.

2/ On tire successivement et sans remise les 7 jetons de l'urne U_1.
Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur k si le premier jeton blanc apparaît au $k^{ième}$ tirage.
Donner la loi de probabilité de X, puis calculer son espérance mathématique et son écart-type.

Exercice n°05:

Une urne contient 3 boules rouges, 3 boules bleues et 4 boules blanches indiscernables au toucher. On tire au hasard 3 boules ; les boules n'étant pas remises dans l'urne. Pour $i \in \{1,2,3\}$ on considère l'événement T_i : " le $i^{ième}$ tirage est tricolore ". On désigne d'autre part par R l'événement : " la boule qui reste dans l'urne après les trois tirages est blanches ". On admettra que $P(R) = \frac{2}{5}$

1/a) Calculer $P(T_1)$, puis $P_{T_1}(T_2)$

b) En déduire $P(T_1 \cap T_2)$

2/ Calculer de même $P(T_1 \cap T_2 \cap T_3)$

3/ Calculer $P_R(T_1 \cap T_2 \cap T_3)$.

Exercice n°06:

On jette deux dès cubiques discernables et non pipés D_1 et D_2. Chacun de ces deux dès porte sur ses faces les points de 1 à 6. Soit n_1 le point apparu sur D_1 et n_2 le point apparu sur D_2.

Soit X la variable aléatoire qui associe à tout jet de D_1 et D_2 le réel $|n_1 - n_2|$.

1/ Déterminer la loi de probabilité de X .

2/ Déterminer la fonction de répartition F de X et la représenter graphiquement.

Exercice n°07:

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernable au toucher.

U_1 contient n $(n \in \mathbb{N}^*)$ boules blanches et 3 boules noires ; U_2 contient 2 boules blanches et une boules noires.

On tire une boule au hasard de U_1 et on la met dans U_2 , puis on tire une boule au hasard de U_2 et on la met dans U_1; l'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.

1/ Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.

2/ On considère l'évènement A :" après l'épreuve , les urnes se retrouvent chacune dans leur configuration de départ".

a) Montrer que $P(A) = \frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$

b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} P(A)$

3/ On considère l'événement B :" après l'épreuve l'urne U_2 contient une seule boule blanche"

Calculer $P(B)$.

4/ Un joueur mise 5 dinars et effectue une épreuve.

A l'issue de cette épreuve , on compte les boules blanches dans U_2.

Si U_2 *contient une seule boule blanche , le joueur reçoit* $\frac{n}{2}$ dinars *; si* U_2 *contient* 2 *boules blanches, le joueur reçoit* $\frac{n}{4}$ dinars *; si* U_2 *contient* 3 *boules blanches , le joueur ne reçoit rien.*

a) Expliquer pourquoi le joueur n'a aucun intérêt à jouer tant que n *ne dépasse pas* 10.

Dans la suite , on considère $n > 10$*, et on introduit la variable aléatoire* X *qui prend pour valeur les* <u>*gains algébriques*</u> *du joueur.On rappelle que le gain algébrique prend en compte la somme reçue, ainsi que la mise initiale.*

b) Déterminer la loi de probabilité de X .

c) Calculer l'espérance mathématique de X .

d) Pour quelles valeurs de n *le jeu est-il favorable au joueur ?*

Exercice n°08:

-I-

Pour tout entier naturel non nul n*, on pose :* $u_n = \frac{1}{4^n} C_n^{2n}$

1/ *Donner* u_1 , u_2 *et* u_3 *sous forme de fraction irréductibles.*

2/ *Montrer que , pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *on a :* $u_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} u_n$.

3/ *Etudier la monotonie de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et en déduire sa convergence.*

4/ *Montrer par récurrence que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a :*

$$u_n \le \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

5/ *Préciser* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

-II-

soit n un entier naturel non nul. On lance $2n$ fois une pièce de monnaie équilibrée. On désigne par X la variable aléatoire qui compte le nombre de "Piles" obtenus au cours de ces $2n$ lancers.

1/ Quelle est la loi de probabilité de X.

Exprimer son espérance mathématique et sa variance en fonction de n

2/ On note p_n la probabilité d'obtenir exactement n "Piles" en lançant la pièce $2n$ fois.

a) Exprimer p_n en fonction de n.

*b) En utilisant 5/-**I-**, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.*

3/ Déterminer la probabilité qu'a l'issue de ces $2n$ lancers, le nombre de "Pile" soit strictement supérieur au nombre de "Faces".

Exercice n°09:

-I-

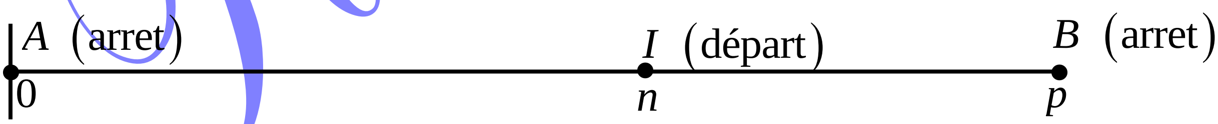
On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = \frac{1}{2}v_{n+1} + \frac{1}{2}v_{n-1}$$

Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.

-II-

*Soit p un entier naturel fixé supérieur à 2 et n un entier tel que $0 \le n \le p$. Une particule est placée sur un axe gradué, **initialement** au point I d'abscisse n.*



On lance autant de fois que nécessaire une pièce de monnaie équilibrée. A chaque obtention de face, la particule avance d'une unité vers la droite. A chaque obtention de pile, la particule recule d'une unité vers *la gauche. Le jeu s'arrête dès que la particule atteint le point* A *d'abscisse* 0 *ou le point* B *d'abscisse* p. *On note* v_n *la probabilité pour que le jeu s'arrête en* A.

1/ Que valent v_0 *et* v_p *?*

2/ On note F *l'événement " obtenir face au premier lancer de la pièce " et* A_n *l'événement : " le jeu s'arrête en* A *".*

Montrer que pour tout entier n *tel que* $1 \le n \le p-1$, *on a :*

$$v_n = \frac{1}{2}v_{n+1} + \frac{1}{2}v_{n-1}$$

3/ En déduire v_n *en fonction de* n *et* p.

4/ Quelle est la probabilité pour que le jeu ne s'arrête jamais ?

Exercice n°10:

Soit X *la variable aléatoire indiquant la " durée de vie " d'un modèle de voiture (en années) ; Imaginons que la densité de probabilité de* X *est donnée par la fonction*

$$f(x) = \begin{cases} 0,2\,e^{-0,2x} & \text{si } x \ge 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1/ Vérifier que cette fonction est bien une densité de probabilité.

2/ Calculer la probabilité que la voiture ait une durée de vie:

a) Comprise entre 2 *et* 6 *ans.*

b) Inférieur à 2 *ans.*

c) Supérieur à 10 *ans.*

3/ En moyenne , quelle est la durée de vie de ce modèle de voiture ?

Exercice n°11:

On suppose que la durée de vie d'un individu est une variable aléatoire T *de densité*

$$g(t) = \begin{cases} \lambda t^2 (100\text{-t})^2 & \text{si } t \in [0,100] \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

1/ Déterminer λ *pour que* g *soit une densité de probabilité.*

2/ Calculer $E(T)$.

3/ Quelle est la probabilité pour qu'un individu ait une durée de vie entre 50 et 80 ans .

Exercice n°12:

Soit X une variable aléatoire de densité f définie par :

$$f(t)=\begin{cases} \alpha t^2 & \text{si } t\in[1,2[\\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

1/ Déterminer α .

2/ Expliciter la fonction de répartition de X .

3/ Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

4/ Expliciter la densité de la variable aléatoire $Y=\frac{1}{2}(X-1)$.

Exercice n°13:

Exercice n°22 page 364 (Manuel Scolaire)