Exercice n° 01 :

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n + 3}{U_n + 2} \end{cases}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

1/ Montrer que $0 < U_n < \sqrt{3}$; $\forall n \in \mathbb{N}$.

2/a) Montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante .

b) En déduire que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

3/ Soit la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $V_n = \dfrac{U_n - \sqrt{3}}{U_n + \sqrt{3}}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et qu'elle est convergente.

b) Calculer U_n en fonction de n et retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice n° 02 :

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_1 = 2 \\ U_{n+2} = 3U_{n+1} - 2U_n \end{cases}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

Soit la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $V_n = U_{n+1} - U_n$; $\forall n \in \mathbb{N}$

1/ a) Montrer que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

b) Déterminer V_n en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.

2/ Calculer $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} V_i$ puis en déduire U_n en fonction de n .

Exercice n° 03 :

Soit $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n+k}}$

1/ Calculer $U_1 ; U_2$ et U_3.

2/ a) Montrer que $\sqrt{\frac{n}{2}} \leq U_n \leq \sqrt{n}$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

3/ On pose $V_n = \frac{U_n}{n}$

Montrer que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et donner sa limite.

Exercice n° 04 :

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n + 4} - 2 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1/ Montrer que (U_n) est minorée par 0.

2/ Montrer que $\operatorname{sgn}(U_n - U_{n+1}) = \operatorname{sgn}(U_n)$

3/ En déduire que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Que peut-on déduire ?

4/ Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Exercice n° 05 :

On considère la suite réelle définie par $\begin{cases} U_0 \text{ réel donné} \\ U_{n+1} = \dfrac{1+U_n}{\sqrt{1+U_n^2}} - 1 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1/ Déterminer U_0 pour que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit constante.

2/ On prend $U_0 \in]-1, 0[$

a) Montrer que , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 < U_n < 0$ et que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b) Montrer que , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < 1 + U_{n+1} \leq \dfrac{1+U_n}{\sqrt{1+U_0^2}}$.

c) On pose $k = \dfrac{1}{\sqrt{1+U_0^2}}$

Montrer que , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < 1+U_{n+1} \leq (1+U_0)k^n$.

En déduire que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite l que l'on déterminera.

Exercice n° 06 :

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + \dfrac{1}{U_n} \quad ; \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1/ Montrer que $U_n \geq 1 \quad , \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

2/ Montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

3/ a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $2 \leq U_{n+1}^2 - U_n^2 \leq 2 + U_{n+1} - U_n$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $2n \leq U_n^2 - 1 \leq 2n + U_n - 1$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.

4/ a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $1 - \dfrac{1}{U_n} \leq \dfrac{2n}{U_n^2} \leq 1 - \dfrac{1}{U_n^2}$

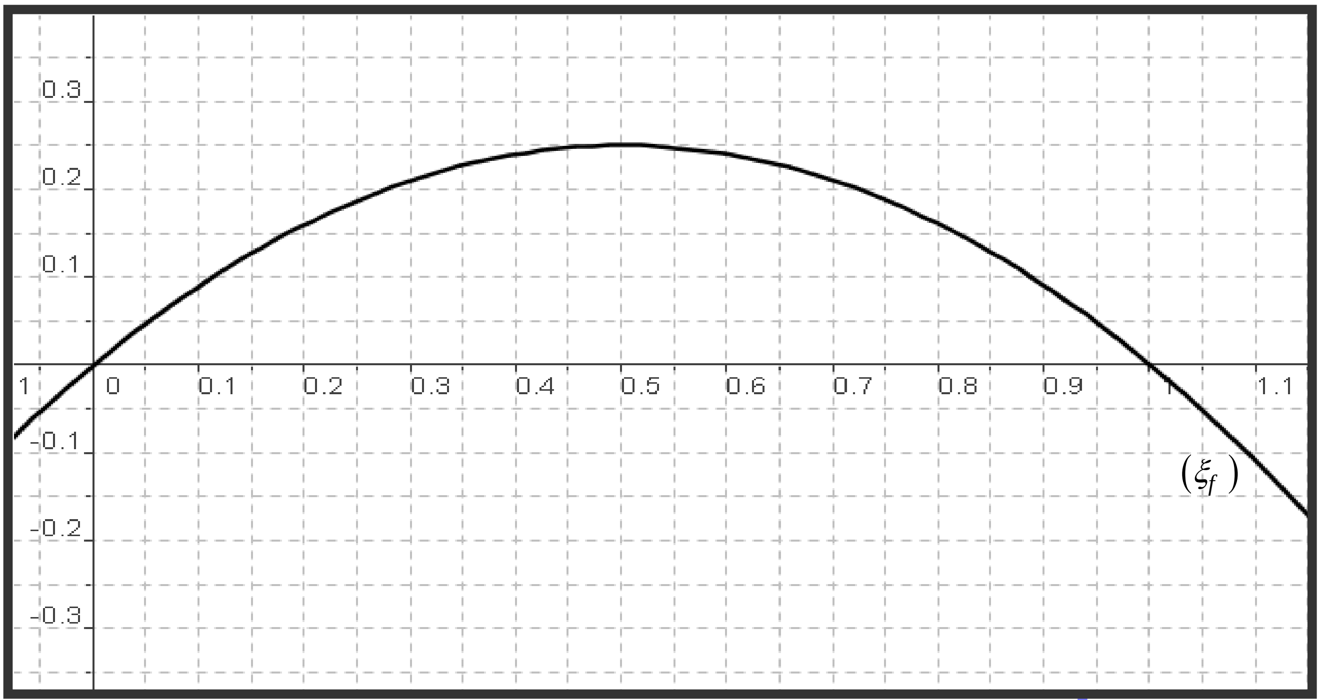
b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2n}}{U_n}$

Exercice n° 07:

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - x^2$ et (ξ_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On définit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = U_n - U_n^2 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1/ a) Sans effectuer de calcul, placer sur la figure suivante, les points de l'axe $(O, \vec{i})$ ayant pour abscisses respectives U_0, U_1, U_2, U_3 et U_4.



b) Calculer les valeurs exactes de U_1 et U_2.

2/ Etudier la monotonie de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3/ Montrer que pour tout $p\in\mathbb{N}^*$ on a : $f\left(\frac{1}{p}\right)\le\frac{1}{p+1}$.

4/ Montrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, on a : $0\le U_n\le\frac{1}{n+1}$

(on pourra utiliser la croissance de f sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$).

5/ En déduire que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

Exercice n° 08 :

1/ On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$; $I_n=\frac{1}{n!}\int_0^1(1-x)^n e^{-x}dx$

a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.

b) Prouver que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a : $0\le I_n\le\frac{1}{n!}\int_0^1 e^{-x}dx$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

c) Montrer, en utilisant une intégration par parties que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a :

$$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - I_n$$

2/ On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie par* $\begin{cases} U_1 = 0 \\ U_{n+1} = U_n + \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ *, on a :* $U_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice n° 09 :

On définit la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par* $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan t)^n dt$

1/ a) Calculer I_0 *et* I_1

b) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$*, on a :* $I_p + I_{p+2} = \frac{1}{p+1}$

c) En déduire I_2 *et* I_3.

2/ Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante. En déduire qu'elle est convergente.*

3/ a) En utilisant 1/ b) et 2/, prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$*, on a :*

$$\frac{1}{2(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{2(n-1)}$$

b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} n\, I_n$.

4/ On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$*, on a :* $U_n = I_0 + (-1)^n I_{2n+2}$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.