Série d'exercices * 3ème M** **Trigonométrie**	**Lycée Secondaire Ali Zouaoui** **" Hajeb Laayoun "**

Exercice N° 01 :

Calculer (sans calculatrice)

1- $\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)-\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)-\sin\left(\frac{5\pi}{14}\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)$

2- $\tan\left(\frac{\pi}{9}\right)+\tan\left(\frac{2\pi}{9}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)+\tan\left(\frac{4\pi}{9}\right)+\tan\left(\frac{5\pi}{9}\right)+\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\tan\left(\frac{7\pi}{9}\right)+\tan\left(\frac{8\pi}{9}\right)$

3- $\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{5}\right)+\sin^2\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

4- $\cos^2\left(\frac{2\pi}{8}\right)+\cos^2\left(\frac{4\pi}{8}\right)+\cos^2\left(\frac{6\pi}{8}\right)+1$

Exercice N° 02 :

Soit $ACDE$ un carré direct de coté $a=2$ et soit ABC un triangle équilatéral indirect.

1- a) Montrer que ABE est un triangle isocèle et déterminer la mesure de ses angles.

b) En déduire que $\left(\overrightarrow{EB},\overrightarrow{ED}\right)\equiv\frac{\pi}{12}[2\pi]$

2- Soit H la projection orthogonale de B sur $[ED]$.

Calculer BH et en déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Exercice N° 03 :

Soit $A=2\sin(x)\left[\cos(2x)+\cos(4x)+\cos(6x)\right]$

1- Montrer que pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, on a : $\sin(a+b)+\sin(a-b)=2\sin(a)\cos(b)$

2- Montrer que $A=\sin(7x)-\sin(x)$

3- En déduire la valeur de $B=\sin^2\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\sin^2\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\sin^2\left(\frac{6\pi}{7}\right)$

Exercice N° 04 :

1- a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $\cos(x)+\sin(x)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\cos(x)+\sin(x)=0$

2- Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $\cos(x)-\sin(x)=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\cos(x)+\sin(x)\geq 0$

3- Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$ on a : $\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)-1}=\frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)}$

4- Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$ on a : $\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)-1}=\cot an\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

Exercice N° 05 :

On considère l'équation $(E): \sin(3x)+\sin(2x)=0$

1- Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{R}$ puis dans $]-\pi,\pi]$.

2- a) Montrer que $\sin(3x)=\left[4\cos^2(x)-1\right]\sin(x) \quad ; \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

b) Montrer que $\sin(3x)+\sin(2x)=0 \Leftrightarrow \left[4\cos^2(x)+2\cos(x)-1\right]\sin(x)=0$

3- Parmi les solutions de (E) quelles sont dans $]-\pi,\pi]$ les solutions de l'équation :

$4\cos^2(x)+2\cos(x)-1=0$ dans $]-\pi,\pi]$

4- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4t^2+2t-1=0$

5- En déduire $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

Exercice N° 06 :

1- Montrer que pour tous réels a et b de $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi ; k\in\mathbb{Z}\right\}$, on a:

$$\tan(a)+\tan(b)=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a)\cos(b)}$$

2- Soit $x\in\left]-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right[$

a) Montrer que: $\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4\sin(2x)}{2\cos(2x)-1}$

b) Montrer que : $\cos(x)\left[2\cos(2x)-1\right]=\cos(3x)$

c) En déduire que : $\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\tan(x)+\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=3\tan(3x)$

Exercice N° 07:

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$

On considère un carré $OABC$ de centre S tels que les coordonnées cartésiennes de A et C sont respectivement $(1,\sqrt{3})$ et $(-\sqrt{3},1)$

1- Faire une figure.

2- Déterminer les coordonnées polaires de A ; C ; B et S

3- En déduire $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$; $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Exercice N° 08 :

Soit $f(x)=\sqrt{1+\sin(2x)}+\sqrt{1-\sin(2x)} \quad ; \quad x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

Montrer que $f(x)=\begin{cases} 2\cos(x) & \text{si } x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right] \\ 2\sin(x) & \text{si } x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$

Exercice N° 09 :

Soit $M(x,y)$ un point du plan orienté $\mathscr{P}$ avec $x=\cos(\theta)+\sin(\theta)$ et $y=\sin(\theta)-\cos(\theta)$.

1/ Quel est l'ensemble $(\mathscr{C})$ des points M ? .

2/ a) M étant un point de $(\mathscr{C})$; Vérifier que $|x-y|\le 2$.

b) En déduire qu'il existe $\beta\in\mathbb{R}$ tel que $x-y=2\cos(\beta)$.

3- a) Montrer que $(x+y)^2 + (x-y)^2 = 4$.

b) En déduire que $(x+y)^2 = 4\sin^2(\beta)$

Exercice N° 10 :

Soit $f(x)=\dfrac{1}{\sin(x)}-\dfrac{1}{\sin(3x)}$

1- Déterminer D_f .

2- Montrer que pour tout $x\in D_f$, $f(x)=\dfrac{2\cos(2x)}{\sin(3x)}$

3- a) Montrer que $\dfrac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}-\dfrac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}=\dfrac{\sqrt{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}$

b) En déduire que $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

4- a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $]0,2\pi]$ l'équation $\cos(x)+\left(\sqrt{2}-1\right)\sin(x)=1$

b) Résoudre dans $]0,2\pi]$ l'inéquation $\cos(x)+\left(\sqrt{2}-1\right)\sin(x)\le 1$

5- Prouver que $\dfrac{1}{\sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)}+\dfrac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)}-\dfrac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)}=0$

Exercice N° 11 :

Soit $f(x)=\dfrac{\sin(3x)}{\sin(x)}$

1- Déterminer D_f .

2- Montrer que pour tout $x\in D_f$, $f(x)=1+2\cos(2x)$

3-a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $]0,2\pi[$ l'équation $f(x)=0$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $]0,2\pi]$ l'inéquation $f(x)\le 0$

4- Calculer $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et en déduire la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

5- Soit $x_k=\dfrac{k\pi}{5}$; $k\in\{1;2;3;4\}$; calculer $S=\sum_{k=1}^{4} f(x_k)$ (utiliser 2-).

6- En déduire la valeur de $P=\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)-\frac{1}{4\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}$. Trouver alors la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Exercice N° 12 :

Soient $a\,;b$ et c trois réels tels que $a+b+c=\pi$

Montrer que $\cos(a)+\cos(b)+\cos(c)-1=4\sin\left(\frac{a}{2}\right)\sin\left(\frac{b}{2}\right)\sin\left(\frac{c}{2}\right)$

Exercice N° 13 :

Soient A,B et C trois points du plan. On désigne par $\widehat{A}$ une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$, $\widehat{B}$ une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right)$ et $\widehat{C}$ une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right)$. On pose :

$AB=c$, $AC=b$ et $BC=a$ avec a,b et c trois réels strictement positifs.

1- Montrer que :

a) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\left(\widehat{A}\right)$

b) $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\left(\widehat{B}\right)$

c) $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\left(\widehat{C}\right)$

2- Montrer que pour tout triangle ABC rectangle en A, on a :

$b=a\sin\left(\widehat{B}\right)$ et $c=a\sin\left(\widehat{C}\right)$

3- On désigne par R le rayon du cercle circonscrit à triangle quelconque ABC.

a) Montrer que $a=2R\sin\left(\widehat{A}\right)$(utiliser le point B' diamétralement opposé au point B on examinera trois cas).

b) En déduire que dans tout triangle ABC , on a :

$$\frac{a}{\sin\left(\widehat{A}\right)}=\frac{b}{\sin\left(\widehat{B}\right)}=\frac{c}{\sin\left(\widehat{C}\right)}=2R \quad ❶$$

4- On désigne par S l'aire du triangle ABC .

Montrer que : $S=\frac{bc\sin\left(\widehat{A}\right)}{2}=\frac{abc}{4R}$

5- On désigne par p le périmètre du triangle ABC et par r le rayon du cercle inscrit à ce triangle. Montrer que $S=\frac{pr}{2}$.

6- Utiliser ❶ pour montrer que :

a) $b^2+c^2=2a^2 \Leftrightarrow \sin^2\left(\widehat{B}\right)+\sin^2\left(\widehat{C}\right)=2\sin^2\left(\widehat{A}\right)$

b) $b^2+c^2=2a^2 \Leftrightarrow \cos\left(2\widehat{B}\right)+\cos\left(2\widehat{C}\right)=2\cos\left(2\widehat{A}\right)$

7- Utiliser ❶ pour montrer que la relation $\sin^2\left(\widehat{A}\right)=\sin^2\left(\widehat{B}\right)+\sin^2\left(\widehat{C}\right)$ caractérise un triangle rectangle en A.