Série d'exercices *** $3^{ème}$ M Fonctions trigonométriques	Lycée Secondaire Ali Zouaoui " Hajeb Laayoun "

Fonctions :

Fonctions	Ensemble de définition , continuité et dérivabilité	Période	*Fonctions dérivées*
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	2π	$x \mapsto \cos(x)$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	2π	$x \mapsto -\sin(x)$
$x \mapsto \sin(ax+b)$; $a \in \mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$	$2\pi/\lvert a\rvert$	$x \mapsto a\cos(ax+b)$
$x \mapsto \cos(ax+b)$; $a \in \mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$	$2\pi/\lvert a\rvert$	$x \mapsto -a\sin(ax+b)$

Limite :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1 \;;\; \lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{x}=a\,;(a\in\mathbb{R}) \;;\; \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}=0 \;;\; \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

Domaine d'étude :

Si une fonction f est périodique de période T alors D_E le domaine d'étude est $D_E = \lfloor a\,, a+T\rceil \cap D_f$.

- Comment représenter $g : x \mapsto f(x)+b\,; b\in\mathbb{R}$?

$M(x, f(x)) \in (\xi_f)\,; M'(x, f(x)+b) \in (\xi_g)$ donc $\overrightarrow{MM'} = b\,\vec{j}$ et par suite $\underline{(\xi_g) = t_{b\vec{j}}(\xi_f)}$

- Comment représenter $g : x \mapsto f(x-a)\,; a\in\mathbb{R}$? ; $\underline{(\xi_g) = t_{a\vec{i}}(\xi_f)}$

Point méthode :

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = "\frac{0}{0}"$	❶Simplification ❷ Se ramener au théorème sur les limites ❸Utiliser le nombre dérivé ❹Changement de variable $h = x-a$
Signe d'une somme de termes hybride $\lfloor exemple : x+\sin(x)\,; -x+\cos(x)\,; \cdots \rfloor$	Dresser le tableau de variation de f tel que $f(x)$ est l'expression dont on veut déterminer le signe
Déterminer un minimum ou un maximum de f	Etudier le signe de $f'(x)$

Exercice N°01 :

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{5x}\ ;\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)-\sin(x)}{x}\ ;\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(2x)}{1-\cos(x)}\ ;\ \lim_{x\to+\infty}x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\ ;\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x)-1}{x-\frac{\pi}{2}}\ ;$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)}{x-\frac{\pi}{2}}\ ;\ \lim_{x\to-\frac{\pi}{4}}\frac{\sin(x)+\cos(x)}{x+\frac{\pi}{4}}$$

Exercice N°02 :

Soit f la fonction définie par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2(\pi x)}{x-1} & si\ \ x\neq 1\\ 0 & si\ x=1\end{cases}$

1) Montrer que f est continue en 1 .

2) f est-elle dérivable en 1 ?

Exercice N°03 :

Soit $f(x)=\dfrac{\sin(x)+|\sin x|}{2}$

1) Montrer que la droite $\Delta : x=\dfrac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de (ξ_f).

2) Montrer que f est périodique de période 2π .

3) Etudier f et tracer la courbe représentative (ξ_f) de f dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Exercice N°04 :

Soit $f(x)=\sin^2(x)-\sin(x)+2$

1) Etudier la fonction f.

2) Tracer (ξ_f) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3) Soit $g(x)=\cos^2(x)-\cos(x)+2$; En utilisant (ξ_f), tracer (ξ_g) (expliquer) .

Exercice N°05 :

Soit $f(x)=\sin(2x)$

1)Etudier les variations de f sur un intervalle convenablement choisie .

2) Tracer la courbe représentative (ξ_f) de f dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ .Expliquer comment tracer la courbe (ξ_g) de g en utilisant (ξ_f) ?

4) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=2-\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$. Tracer la courbe représentative (ξ_h) de h en utilisant (ξ_g).

Exercice N°06 :

On donne la fonction f définie sur $[0,\pi]$ par $f(x)=a\sin(2x)+b(1-\cos 2x)\,;(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

1) Déterminer a *et* b sachant que f admet un extremum au point $x_0=\frac{\pi}{6}$ *et* $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-3$.

2) Montrer alors que $f(x)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-1$ pour tout $x\in[0,\pi]$.

3) a) Dresser le tableau de variation de f sur $[0,\pi]$.

b) Calculer $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et en déduire le signe de $f(x)$ sur $[0,\pi]$.

4) Soit $g:[0,\pi]\to\mathbb{R}$; $x\mapsto\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{3}\sin(2x)-2\sin^2(x)}$.

Montrer que pour tout $x\in D_g$ *on a* : $g(x)=\dfrac{\sin(x)}{f(x)}$ et en déduire D_g.