Série d'exercices *** 3ème M GEOMETRIE DANS L' ESPACE	Lycée Secondaire Ali Zouaoui " Hajeb Laayoun "

On désigne par $\mathscr{E}$ l'ensemble des points de l'espace et par $\mathscr{W}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace

- Comme dans le plan , un couple de points (A,B) de l'espace défini un vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- Pour tout couple de points (C,D) de l'espace : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow A*D=B*C$.
- $\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{CC}=\overrightarrow{DD}=\cdots=\vec{0}$

Théorème : Pour tout A de $\mathscr{E}$ et pour tout $\vec{u}$ de $\mathscr{W}$ il existe un point unique M de $\mathscr{E}$ tel que $\overrightarrow{AM}=\vec{u}$.

Opérations dans $\mathscr{W}$:

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathscr{W}$ et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ alors on a :

$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$	$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$
$\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$	$0\cdot\vec{u}=\vec{0}$
$\vec{u}=\overrightarrow{AB}\,;\vec{v}=\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (Relation de Chasles)	$k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}\,;k\in\mathbb{R}$
$\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$	$(k\,k')\vec{u} = k(k'\vec{u})\,;(k,k')\in\mathbb{R}^2$

- Si $\vec{u}=\vec{0}$ alors $\alpha\cdot\vec{u}=\vec{0}$.
- Si $\vec{u}\neq\vec{0}$, soient A et B deux points de $\mathscr{E}$ tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ alors $\alpha\cdot\vec{u}=\overrightarrow{AC}$ avec C le point de (AB) d'abscisse α dans le repère $(A,\overrightarrow{AB})$.

Vecteurs colinéaires :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathscr{W}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si il existe un réel α tel que $\vec{u}=\alpha\cdot\vec{v}$.

Trois points A , B et C de $\mathscr{E}$ sont **alignés** si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires .

Vecteurs coplanaires :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathscr{W}$ et A , B , C et D quatre points de $\mathscr{E}$ tels que :
$\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{w}=\overrightarrow{AD}$. On dit que
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** si et seulement si les points A , B , C et D sont coplanaires (i.e : appartiennent à un même plan) .

Théorème :

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si , il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tels que $\vec{w}=\alpha\cdot\vec{u}+\beta\cdot\vec{v}$.

On dit aussi que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **linéairement dépendants** ou le triplet $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ forme une **famille liée** .

Remarque :

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires .

Base et repère cartésien de l'espace :

On appelle **base** de $\mathscr{W}$ tout triplet $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de vecteurs non coplanaires .

Soit O un point de $\mathscr{E}$ et $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ une base de $\mathscr{W}$. $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ s'appelle un **repère cartésien** de l'espace $\mathscr{E}$.

Théorème :

Soit $\mathscr{B}=\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ une base de $\mathscr{W}$.

❶ Pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathscr{W}$, il existe un unique triplet $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tels que $\vec{u}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$

(x,y,z) s'appellent les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\mathscr{B}$; On note $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$.

❷ Soit O un point de $\mathscr{E}$, pour tout point M de $\mathscr{E}$ il existe un unique triplet de réels (x,y,z) tels que : $\overrightarrow{OM}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$; x, y et z s'appellent les coordonnées de M dans le repère $\mathscr{R}=\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$; On note : $M(x,y,z)_{\mathscr{R}}$.

x : L'abscisse de M ; y : L'ordonnée de M ; z : La côte de M.

Propriétés de calcul de coordonnées :

Sont les même que dans le plan .

Condition analytique de colinéarité de deux vecteurs :

Théorème :

Soit $\mathscr{B}=\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ une base de $\mathscr{W}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ deux vecteurs de $\mathscr{W}$; $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si : $\begin{vmatrix}a & a'\\ b & b'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & a'\\ c & c'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b & b'\\ c & c'\end{vmatrix}=0$.

Définition :

Soit $\mathscr{B}=\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ une base de $\mathscr{W}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}a''\\b''\\c''\end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ trois vecteurs de $\mathscr{W}$; On appelle **déterminant** de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et on note $\begin{vmatrix}a & a' & a''\\ b & b' & b''\\ c & c' & c''\end{vmatrix}$ le réel $D=ab'c''+a'b''c+a''bc'-a''b'c-ab''c'-a'bc''$

Règle de Sarrus pour le calcul de déterminant d'ordre 3 :

Soit à calculer dét $\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)=\begin{vmatrix}a & a' & a''\\ b & b' & b''\\ c & c' & c''\end{vmatrix}$ d'après Sarrus ,on écrit le déterminant et on recopie les deux premières colonnes puis On fait la somme de 3 facteurs pris sur une même diagonale :

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a & a' & a'' & a & a' \\ b & b' & b'' & b & b' \\ c & c' & c'' & c & c' \end{array}\right.$$

➢ Les segments en traits continues relient trois éléments dont le produit forme un terme accompagné du signe $\oplus$.

- Les segments en traits discontinues relient trois éléments dont le produit forme un terme accompagné du signe $\odot$.

Théorème :

Un triplet de vecteur de $\mathscr{W}$ forme une base , si et seulement si , son déterminant relativement à une base quelconque de $\mathscr{W}$ est non nul .

Exemples de changement de repère :

Changement de repère par changement d'origine :

Soit $\mathscr{R}=\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ un repère de $\mathscr{E}$ et O' le point de coordonnées (α,β,γ) dans ce repère .

Considérons le repère

$\mathscr{R}'=\left(O',\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$; Soient $M(x,y,z)_{\mathscr{R}}$ et $M(x',y',z')_{\mathscr{R}'}$; On se propose de calculer x',y',z' en fonction de x,y,z.

On a d'une part : $\overrightarrow{OM}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$ et d'autre part $\overrightarrow{O'M}=x'\cdot\vec{i}+y'\cdot\vec{j}+z'\cdot\vec{k}$.

Or $\overrightarrow{O'M}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OO'}$ d'où $x'\cdot\vec{i}+y'\cdot\vec{j}+z'\cdot\vec{k}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}-\alpha\cdot\vec{i}-\beta\cdot\vec{j}-\gamma\cdot\vec{k}$

$$=(x-\alpha)\cdot\vec{i}+(y-\beta)\cdot\vec{j}+(z-\gamma)\cdot\vec{k}$$

donc $\begin{cases} x'=x-\alpha \\ y'=y-\beta \\ z'=z-\gamma \end{cases}$

Même raisonnement pour :

- **Changement de repère par changement base .**
- **Changement de repère par changement d'origine et de base .**

Exercice N°01 :

Soient A, B et C trois points non alignés de $\mathscr{E}$. Préciser dans chaque cas s'il est possible de déterminer le point M tel que :

a) $\overrightarrow{MA}=-3\overrightarrow{MB}$; b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}$; c) $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MA}$

Exercice N°02 :

$\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ un repère de $\mathscr{E}$. Déterminer α et β dans chacun des cas suivants pour que les points A, B et M soient alignés :

1/ a) $A(2,0,-1);B(0,2,3);M(\alpha,0,\beta)$; $A(1,-1,2);B(5,0,3);M(\alpha,\beta,0)$.

2/ Pour les valeurs trouvées de α et β déterminer les coordonnées de C pour que $ABCM$ soit un parallélogramme .

Exercice N°03 :

1/ Dans chacun des cas suivants , les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont –ils coplanaires ?

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-2\\-1\\4\end{pmatrix}$; b) $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-1\\0\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\10\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$

2/ Soit une $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ une base de $\mathscr{W}$. Dans chacun des cas suivants montrer que le triplet $\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$ est une base de $\mathscr{W}$:

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}4\\-2\\-18\end{pmatrix}$; b) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$

3/ Soit $\mathscr{R}=\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ un repère de $\mathscr{E}$. Déterminer le réel α pour que les points :

$A(2,3,1); B(1,2,0); C(\alpha,\alpha,3)$ et $D(3,1,-2)$ soient coplanaires .

Exercice N°04 :

On considère un tétraèdre $ABCD$. Soient I, J, K et L les points de $\mathscr{E}$ définis par :

$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{DK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{DL}=\frac{1}{7}\overrightarrow{DA}$

1/ Déterminer les coordonnées des points I, J, K et L dans le repère $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$.

2/ Montrer les I, J, K et L sont coplanaires .

Exercice N°05 :

Soit $ABCDA'B'C'D'$ un cube et $\mathscr{R}=\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AA'}\right)$ un repère de $\mathscr{E}$.

1/ a) Trouver les coordonnées des points D, D', B' et C' dans $\mathscr{R}$.

b) Soit $O=B'*C'$. Trouver les coordonnées de $\overrightarrow{OC}$ dans la base $\mathscr{B}=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AA'}\right)$.

2/ Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AA'}\right)$.

a) Montrer que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires .

b) Soit $\mathscr{R}'=\left(A,\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$ un repère de $\mathscr{E}$. Déterminer les coordonnées des points B, C et A' dans $\mathscr{R}'$ puis les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OC}$ dans la base $\mathscr{B}'=\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$.

Exercice N°06 :

Soit $\mathscr{R}=\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ un repère de $\mathscr{E}$; on donne les points

$A(0,1,-1); B(2,1,1); C(1,-3,2)$ et $D(3,-1,4)$.

1/ Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés .

2/ Montrer que $\mathscr{B}=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$ est une base de $\mathscr{W}$.

3/ Soit $E\left(\frac{9}{2},5,\alpha\right)$ où $\alpha\in\mathbb{R}$ un point de $\mathscr{E}$.

a) Déterminer α pour que les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{BC}$ soient colinéaires .

b) Donner alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CE}$ dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice N°07 :

Soit $\mathscr{R}=\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ un repère de $\mathscr{E}$; on donne : $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$; $\vec{v}=\vec{j}+\vec{k}$; $\vec{w}=\vec{i}+\vec{k}$.

1/ Montrer que $\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$ est une base de $\mathscr{W}$.

2/ Soit $\vec{L}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$. Calculer les coordonnées de $\vec{L}$ dans la base $\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$.

3/ Soit $A(1,-2,1)$ et $B(-1,2,2)$ dans le repère $\mathscr{R}=\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Déterminer les coordonnées de B dans le repère $\mathscr{R}'=\left(A,\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$.