Dérivabilité en un réel :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I, on dit que f est dérivable en a, s'il existe un nombre réel l tel que : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$ ou $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=l$ (avec $h=x-a$). Le réel l s'appelle le nombre dérivé de f en a et il est noté $f'(a)$.

★ **Interprétations :**

➯ <u>Graphique</u> : notion de tangente :

Si f est dérivable en a, la courbe représentative de f admet en $M(a, f(a))$ une tangente de coefficient directeur $f'(a)$; cette tangente en M a pour équation :

$y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

Conséquences :

- Si f est dérivable à droite en a alors la courbe représentative de f admet au point $M(a,f(a))$ une demi tangente T_d d'équation $T_d : y=f_d'(a)(x-a)+f(a)$ et $x\geq a$.
- Si f est dérivable à gauche en a alors la courbe représentative de f admet au point $M(a,f(a))$ une demi tangente T_g d'équation $T_g : y=f_g'(a)(x-a)+f(a)$ et $x\leq a$.

Interprétation graphique :

Si	Interprétation graphique
$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$	(ξ_f) admet au point $M(a,f(a))$ une demi tangente verticale dirigé vers le haut d'équation : $x=a$ et $y\geq f(a)$
$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$	(ξ_f) admet au point $M(a,f(a))$ une demi tangente verticale dirigé vers le bas d'équation : $x=a$ et $y\leq f(a)$

➯ <u>Numérique</u> : approximation affine :

La fonction $h\mapsto f(a+h)$ admet une « bonne » approximation affine de :

$h\mapsto f(a)+f'(a)h$ pour h proche de 0, on note $f(a+h)\approx f(a)+f'(a)h$.

➯ <u>Cinématique</u> : vitesse :

Si $t\mapsto f(t)$ est la loi horaire d'un mouvement, $f'(t_0)$ est la vitesse instantanée à l'instant t_0.

Dérivation sur un intervalle :

Définition :

* Soient a et b finis ou infinis ; On dit que la fonction f est dérivable sur $\left]a, b\right[$ si f est dérivable en tout réel de $\left]a, b\right[$.
* Soient a un réel et b fini ou infini ; On dit que la fonction f est dérivable sur $\left[a, b\right[$ si f est dérivable sur $\left]a, b\right[$ et si elle est dérivable à droite en a.
* Soient a fini ou infini et b un réel ; On dit que la fonction f est dérivable sur $\left]a, b\right]$ si f est dérivable sur $\left]a, b\right[$ et si elle est dérivable à gauche en b.
* Soient a et b deux réels ; On dit que la fonction f est dérivable sur $\left[a, b\right]$ si f est dérivable sur $\left]a, b\right[$ et si elle est dérivable à droite en a et gauche en b.

Opérations sur les fonctions dérivables :

Théorème :

* Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I alors $f+g$; λf $(\lambda \in \mathbb{R})$ et $f \times g$ sont dérivables sur I et pour tout $x \in I$ on a :

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) \ ; \ (\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$$

$$(f \times g)'(x) = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$$

* Si de plus g ne s'annule pas sur I alors les fonctions $\frac{1}{g}$; $\frac{f}{g}$ et g^n $(n \in \mathbb{N}^*)$ sont dérivable sur I et pour tout $x \in I$ on a :

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{g^2(x)} \ ; \ \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$$

et $(g^n)'(x) = n\, g^{n-1}(x)\, g'(x)$.

Dérivée d'une fonction composée :

Théorème :

* Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et si g est une fonction dérivable sur $f(I)$ alors la fonction $g \circ f$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$ on a :

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x).$$

* Si f est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I alors la fonction $\sqrt{f}$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$ on a : $\left(\sqrt{f}\right)'(x) = \frac{f'}{2\sqrt{f}}(x)$.

Lien entre signe de la dérivée et variation :

Théorème : soit f est une fonction continue sur $\left[a, b\right]$ et dérivable sur $\left]a, b\right[$ on a :

$*\quad \begin{cases} Si\ f'(x)\geq 0 \ \text{ sur } \ ]a,b[\ \Rightarrow \ f \text{ est croissante sur } [a,b] \\ Si\ f'(x)>0 \ \text{ sur } \ ]a,b[\ \Rightarrow \ f \text{ est strictement croissante sur } [a,b] \end{cases}$

$*\quad \begin{cases} Si\ f'(x)\leq 0 \ \text{ sur } \ ]a,b[\ \Rightarrow \ f \text{ est décroissante sur } [a,b] \\ Si\ f'(x)<0 \ \text{ sur } \ ]a,b[\ \Rightarrow \ f \text{ est strictement décroissante sur } [a,b] \end{cases}$

$*\quad Si\ f'(x)=0 \ \text{ sur } \ ]a,b[\ \Rightarrow \ f \text{ est constante sur } [a,b].$

Lien entre dérivée et extremum local :

Théorèmes :

- Soit f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Si f' s'annule en un point x_0 de I en changeant de signe alors f admet un extremum local en x_0.
- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$, si f admet un extrémum local en x_0 alors $f'(x_0)=0$

Dérivée seconde , point d'inflexion :

Définition : soit (ξ_f) la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, un point $A\in(\xi_f)$ est un point d'inflexion de (ξ_f) si (ξ_f) traverse sa tangente en A.

Théorème : soit x_0 un réel et f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert contenant x_0 . Si f'' s'annule en x_0 en changeant de signe alors le point $M_0(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de (ξ_f).

Exercice N° 01 :

Soit $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x} & \text{si } x>2 \\ \dfrac{x}{2} & \text{si } x\leq 2 \end{cases}$

Etudier la dérivabilité de f en 2 et indiquer les conséquences graphiques des résultats obtenus.

Exercice N° 02 :

Soit $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x-1}} & \text{si } x>1 \\ m & \text{si } x=1 \end{cases}$

1- Déterminer la valeur de m pour que f soit continue en 1

2- a) Etudier alors la dérivabilité de f en 1.

b) Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Exercice N° 03 :

Soient $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ et $g(x)=\sqrt{x+1}$

1- Montrer que f et g sont dérivables en 0 puis calculer $f'(0)$ et $g'(0)$.

2- Déterminer les approximations affines de f et g au voisinage de 0.

3- Calculer $\sqrt{1,00002}$; $\sqrt{0,995}$; $\dfrac{1}{0,996}$ et $\dfrac{1}{1,008}$

Exercice N° 04 :

Soient f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et a un réel.

1- Montrer que $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{af(x)-xf(a)}{x-a}=af'(a)-f(a)$

2-En déduire $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{64x-2\left(2x^2-6\right)^6}{x-2}$

Exercice N° 05 :

Soit $f(x)=\begin{cases} x^2+|x+2|-1 & \text{si } x<1 \\ (x-1)\sqrt{x-1}+3x & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$

1- Etudier la dérivabilité de f en (-2) et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2- a) Montrer que f est dérivable en 1 et déterminer $f'(1)$.

b) En déduire $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+nh)-f(1)}{h}$; $n\in\mathbb{Z}^*$ puis calculer $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+3h)-f(1-2h)}{h}$

Exercice N° 06 :

Soit f la fonction définie par $f(x)=x^2+2xE(x)-1$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

1- Montrer que f est continue en 0 .

2- a) Etudier la dérivabilité de f en 0^- et en 0^+.

b) f est- elle dérivable en 0 ?

Exercice N° 07 :

Soit $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2-1}+4-x & \text{si } x\geq 1 \\ \dfrac{(m+1)x^3-3x+m^2}{x-1} & \text{si } 0\leq x<1 \\ x^2\sqrt{-x}+2x-1 & \text{si } x<0 \end{cases}$; $m\in\mathbb{R}$

1- Calculer $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$

2- Etudier suivant le paramètre réel m , $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

3- Etudier suivant le paramètre réel m la continuité de f en 1.

4- Etudier suivant le paramètre réel m la dérivabilité de f en 1.

5- On prend $m=1$ et $x_0\in\,]0,1[$

a) Montrer que f est dérivable en x_0.

b) Existe il un point de (C_f) d'abscisse x_0 où la tangente est parallèle à $(\Delta): 4x-y+3=0$.

c) Existe il un point de (C_f) d'abscisse x_0 où la tangente est perpendiculaire à

$(\Delta'): x-3y-3=0$.

Exercice N° 08 :

Soit $f(x)=x^2-2|x+1|$

1- Etudier la dérivabilité de f en (-1).

2- Dresser le tableau de variation de f et préciser la nature des extremas.

Exercice N° 09 :

Soit $f(x)=\dfrac{8x^2-3x}{4x^2+1}$

1- Dresser le tableau de variation de f.

2- En déduire que pour tout réel x, on a : $-\dfrac{1}{4}\leq f(x)\leq \dfrac{9}{4}$.

3- Calculer $f(1)$ et montrer que pour tout $x\in]0,1[$, on a : $f\left(\dfrac{1}{x}\right)>1$.

Exercice N° 10 :

Soit $f_a(x)=\dfrac{ax^2-x+a+1}{3x-1}$; $a\in\mathbb{R}$

1- a) Calculer Soit $f'(x)$ pour tout Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$.

b) Déterminer suivant les valeurs de a le nombre d'extrémum de f_a.

c) Dans le cas où f_a n'admet pas d'extrema , préciser son sens de variation.

2- a) Déterminer a pour que f_a admette un extrémum relatif en (-1).

b) Dresser le tableau de variation de f_1.

Exercice N° 11 :

Soit $f_m(x)=\dfrac{mx+2-m}{2x+m-5}$; $m\in\mathbb{R}$; (ξ_m) la courbe représentative de f_m dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- Déterminer m dans les cas suivants :

a) $(\Delta): y=2$ est une asymptote horizontale à (ξ_m) .

b) $(\Delta'): x=1$ est une asymptote verticale à (ξ_m).

2- Etudier suivant les valeurs de m, les variations de f_m.

3- Montrer que pour tout réel m, pour lequel f_m n'est pas constante , (ξ_m) passe par deux points fixes A et B.

4- Soit I_m le point d'intersection des asymptotes de (ξ_m). Quel est l'ensemble des points I_m lorsque m vari dans $\mathbb{R}\setminus\{-1,4\}$.

5- Tracer (ξ_1).

6- En déduire la représentation graphique de $g:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\dfrac{|x+1|}{2x+4}$