Série d'exercices *** 3ème M Généralités sur les fonctions	Lycée Secondaire Ali Zouaoui " Hajeb Laayoun "

Variation :

❶ Soient f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur un intervalle I et $(a,b)\in I^2$ tel que $a\neq b$, On a :

Si $\dfrac{f(a)-f(b)}{b-a}\geq 0 \Longrightarrow$	f est croissante sur I
Si $\dfrac{f(a)-f(b)}{b-a}\leq 0 \Longrightarrow$	f est décroissante sur I
Si $f(a)=f(b) \Longrightarrow$	f est constante sur I
Une fonction numérique est dite monotone sur I lorsqu'elle est croissante ou décroissante sur I	

❷ Soient f une fonction numérique d'une variable réelle définie et positive sur un intervalle I , on a :

Si f est croissante sur I $\Longrightarrow$	$\sqrt{f}$ est croissante sur I
Si f est décroissante sur I $\Longrightarrow$	$\sqrt{f}$ est décroissante sur I
Si f est majorée sur I $\Longrightarrow$	$\sqrt{f}$ est majorée sur I

❸ Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I , on a :

Si f est croissante sur I $\Longrightarrow$	$-f$ est décroissante sur I
Si f et g sont croissantes sur I $\Longrightarrow$	$f+g$ est croissante sur I
Si f et g sont décroissantes sur I $\Longrightarrow$	$f+g$ est décroissante sur I
Si f et g sont croissantes sur I $\Longrightarrow$	$f\times g$ est croissante sur I

Parité et périodicité d'une fonction :

* f est paire sur I $\Longleftrightarrow$ $\forall x\in I$, on a : $\begin{cases}(-x)\in I\\ \underline{\underline{\text{et}}}\\ f(-x)=f(x)\end{cases}$

* f est impaire sur I $\Longleftrightarrow$ $\forall x\in I$, on a : $\begin{cases}(-x)\in I\\ \underline{\underline{\text{et}}}\\ f(-x)=-f(x)\end{cases}$

* f est périodique de période T $(T\in I_+^*)$ sur I $\Longleftrightarrow$ $\forall x\in I$, on a : $\begin{cases}(x+T)\in I\\ \underline{\underline{\text{et}}}\\ f(x+T)=f(x)\end{cases}$

Maximum – Minimum :

Soit f une fonction définie sur une partie $D \subseteq \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$

- Si $\forall x \in D$, $f(x) \leq f(x_0)$, on dit que f admet un maximum absolu en x_0.
- Si $\forall x \in D$, $f(x) \geq f(x_0)$, on dit que f admet un minimum absolu en x_0.
- S'il existe un intervalle $I \subset D$ contenant x_0 tel que $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in I$, on dit que f admet un maximum local en x_0.
- S'il existe un intervalle $I \subset D$ contenant x_0 tel que $f(x) \geq f(x_0)$, $\forall x \in I$, on dit que f admet un minimum local en x_0.

Fonctions affine par intervalles :

* f est une fonction affine par intervalles si son domaine de définition est réunion d'intervalles sur chacun des quels $f(x) = ax + b$

* La représentation graphique d'une fonction affine par intervalles est une réunion de demi-droites ou de segments de droites.

Fonction partie entière :

* On appelle fonction partie entière de x et on note $E(x)$ (ou $\lfloor x \rfloor$), le plus grand entier inférieur ou égal à x .

* On appelle fonction partie entière la fonction qui à tout réel associe sa partie entière.

* Pour tout réel x , il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$ et on a : $E(x) = n$

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}$ on a : $E(x+k) = E(x) + k$	$\forall x \in \mathbb{Z}$, on a : $E(-x) = -E(x)$
$\forall x \notin \mathbb{Z}$, on a : $E(-x) = -E(x) - 1$	$\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $x - 1 < E(x) \leq x$

Construction d'une courbe à partir de celle d'une fonction de référence :

Soit f une fonction définie sur un domaine $D \subseteq \mathbb{R}$ et ($\mathscr{C}_f$) sa représentation graphique dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Fonctions définies par	Conditions d'existence	Transformations permettant de passer de ($\mathscr{C}_f$) à ($\mathscr{C}_g$)
$g(x) = f(x) + b$	$x \in D$	Translation de vecteur $b\,\vec{j}$
$g(x) = f(x+a)$	$(x+a) \in D$	Translation de vecteur $-a\,\vec{i}$
$g(x) = -f(x)$	$x \in D$	Symétrie d'axe $(O, \vec{i})$
$g(x) = \lvert f(x) \rvert$	$x \in D$	* ($\mathscr{C}_f$) $\equiv$ ($\mathscr{C}_g$) si $f(x) \geq 0$ * Symétrie d'axe $(O, \vec{i})$ si $f(x) \leq 0$
$g(x) = f(\lvert x \rvert)$	$\lvert x \rvert \in D$	g est paire donc : * Sur $D \cap \mathbb{R}_+$, ($\mathscr{C}_f$) $\equiv$ ($\mathscr{C}_g$) $= (\Gamma)$ * Sur $D \cap \mathbb{R}_-$, symétrie de (Γ) par rapport à $(O, \vec{j})$

Exercice N° 01 :

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

❶ $f(x)=\dfrac{x+3}{x-2}$; ❷ $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x-2}$; ❸ $f(x)=\dfrac{-3}{|x|-2}$; ❹ $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}$

❺ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$; ❻ $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^3+x-2}$; ❼ $f(x)=\dfrac{x-1}{E(x)-x}$

Exercice N° 02 :

Répondre par vraie ou faux en justifiant votre réponses :

a) La fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-5;6\}$ par $f(x)=x^3$ est impaire .

b) La fonction g définie sur $[-8,0[\cup]0,8]$ par $g(x)=x^2$ est paire .

c) La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^2-x+2$ n'est ni paire ni impaire .

Exercice N° 03 :

1- Montrer que si f est une fonction impaire et $f(0)$ existe alors $f(0)=0$.

2- Soient f et g deux fonctions définies sur I et de même parité.

Etudier la parité de $f\times g$ et $f+g$.

Exercice N° 04 :

Soit $f(x)=x(1-x)$

1- Déterminer D_f (le domaine de définition de f).

2- a) Montrer que $\forall x\in D_f$, $f(x)\leq\dfrac{1}{4}$

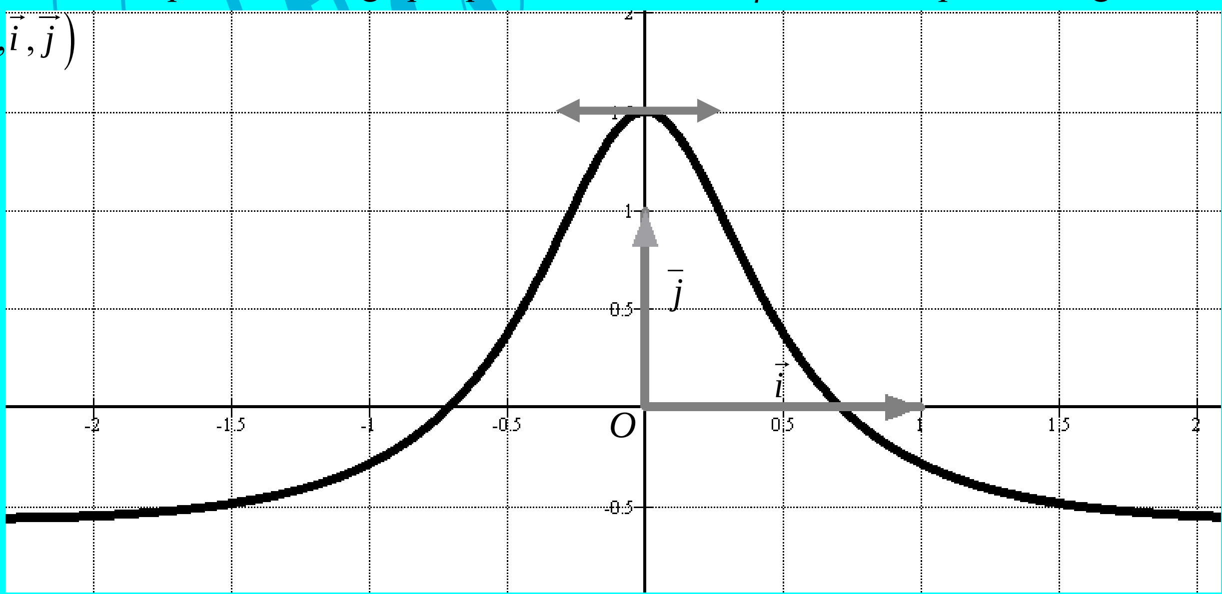
b) Conclure

3- a) Montrer que $\forall x\in D_f$, $f(x)=\dfrac{1}{4}-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2$

b) En déduire la monotonie de f sur D_f .

Exercice N° 05 :

On donne la représentation graphique d'une fonction f dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$



Déduire la représentation graphique des fonctions suivantes :

a) $f_1(x)=|f(x)|$; b) $f_2(x)=f(x)-1$

c) $f_3(x)=f(x-2)$; d) $f_4(x)=f(|x|)$

Exercice N° 06 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)-2f(-x)=x^6-2x^2$

1- Montrer que f est paire.

2- Déterminer $f(x)$

Exercice N° 07 :

Soit $f(x)=3(2x+5)^2-4$

1- Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$, on a : $f(x)\geq -4$

2- Montrer que $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2, f(a)-f(b)=12(a+b+5)(a-b)$

3- Etudier la monotonie de f sur $\left]-\infty,-\frac{5}{2}\right]$ et $\left[-\frac{5}{2},+\infty\right[$

Exercice N° 08 :

Soit $f(x)=\dfrac{x^2+4x+1}{x^2+1}$

1- Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)\leq 3$

2- Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)\geq -1$

Exercice N° 09 :

Déterminer l'expression de la fonction f